Частное Учреждение Дополнительного Образования

«Центр развития Образования и Культуры молодежи»

Рекомендована

Педагогическим советом

ЧУДО «ЦОКМ»

(Протокол № 1 от 01.09.2022 г)

УТВЕРЖДАЮ:

_____директор ЧУДО «ЦОКМ»

С.Н. Лапинская

01.09.2022 г.

Приказ №12 от 01.09.2022 г.

ЧУДО "ЦОКМ"

Подписано цифровой подписью: ЧУДО "ЦОКМ"
DN: 1.2.643.100.4=120A3234353230313531353 8,
1.2.643.100.3=120B3034313734333531303239,
1.2.643.100.1=120D3130323234303134303535353 3,
1.2.643.3.131.1.1=120C323435323030333933323533, email=sokm.k26@gmail.com, c=RU,
st=24 Красноярский край, l=Железногорск, street=ул. Октябрьская д. 4 кв. 43, o=ЧУДО "ЦОКМ", cn=ЧУДО "ЦОКМ", title=директор, givenName=Светлана Николаевна,
sn=Лапинская
Дата: 2022.10.06 14:11:21 +07'00'

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа

«ДОВУЗОВСКИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ»

Направленность: естественно-научная

Возраст детей 15-17 лет

Срок реализации – 1-2 года

Автор:

Зиновьева Тамара Васильевна,

учитель математики.

Железногорск, 2022

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к программе «Довузовский курс математики»

Для жизни в современном обществе базовая математическая подготовка просто необходима. Без конкретных математических знаний затруднено понимание принципов устройства и использования современной техники, восприятие научных знаний смежных дисциплин. Математическое образование вносит свой вклад и в формирование общей культуры человека. Все больше специальностей, требующих высокого уровня образования, связано с непосредственным применением математики: экономика, бизнес, финансы, физика, химия, техника, информатика, психология, медицина и другие. Таким образом, расширяется круг школьников, для которых математика становится профессионально значимым предметом. В связи с этим изучение математики в системе дополнительного образования приобретает особую **значимость и актуальность.** Программа «Довузовский курс по математике» имеет **естественнонаучную направленность.**

Образовательная программа «Довузовский курс математики» рассчитана на учащихся выпускных классов **(возраст учащихся 15-17 лет),** которые овладели базовыми знаниями по предмету в рамках школьной программы. Для определения уровня знаний, умений и навыков учащихся на момент вхождения в программу необходим **входной контроль**, который позволит более эффективно организовать учебный процесс.

Новизна данной образовательной программы заключается в том, что подготовка учащихся выпускных классов состоит из следующих компонентов:

- непосредственно математическая подготовка;
- обучение работе с тестами;
- формирование психологической готовности учащихся к сдаче итогового экзамена.

Отличительной особенностью данной программы является соответствие ее содержания требованиям, указанным в «Примерных программах вступительных испытаний в высшие учебные заведения Российской Федерации». Содержание программы максимально приближено к потребностям будущих абитуриентов, таким образом обеспечивая преемственность между системой дополнительного образования и вузовской системой обучения. Уровень освоения программы: **углубленный.**

Изучение математики в рамках данной программы направленно на достижение следующих целей:

- **формирование** представлений об идеях и методах математики; о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов;
- **овладение** языком математики в устной и письменной форме, математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения естественнонаучных дисциплин, продолжения образования и освоения избранной специальности на современном уровне;
- **развитие** логического мышления, алгоритмической культуры, пространственного воображения, математического мышления и интуиции, творческих способностей, необходимых для самостоятельной деятельности в области математики и ее приложений в будущей профессиональной деятельности;
- **воспитание** средствами математики культуры личности через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей; понимания значимости математики для научно-технического прогресса.

Для достижения поставленных целей решаются следующие задачи курса:

- Систематизировать знания основных вопросов школьного курса математики;

- Совершенствовать умение производить тождественные преобразования многочленов, дробей, содержащих переменные; выражений, содержащих степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции;

- Сформировать навыки решения уравнений и неравенств, задач с параметрами;

- Совершенствовать навыки выполнения тестовых заданий различной степени сложности по всем разделам математики;

- Подготовить учащихся выпускного класса к итоговой аттестации.

Программа предусматривает различные **формы занятий**: лекции, семинары, практикумы по решению задач, коллективные и индивидуальные формы работы.

Ожидаемые результаты реализации программы:

- Повышение качества знаний по предмету;

- Развитие творческих способностей в процессе выполнения проблемных заданий, комплексных заданий творческого характера;

- Активизация самостоятельной работы учащихся, готовность к дальнейшему самообразованию, поиску и извлечению информации из различных источников: научной, учебной литературы, СМИ, Интернет-ресурсов;

- Готовность учащихся к итоговой аттестации по предмету;

- Готовность учащихся к продолжению образования в высших учебных заведениях.

В результате изучения данной программы учащиеся 1 года обучения должны знать:

- идеи расширения числовых множеств как способа построения нового математического аппарата для решения практических задач и внутренних задач математики;
- историю развития понятия числа;
- значение идей, методов и результатов алгебры и математического анализа для построения моделей реальных процессов и ситуаций;
- возможности геометрии для описания свойств реальных предметов и их взаимного расположения;
- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применение в различных областях человеческой деятельности;

уметь:

- вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования;
- строить графики линейной, квадратичной, степенной, показательной функций;
- решать задачи на составление уравнений и систем уравнений;
- пользоваться понятием производной при исследовании функций на возрастание (убывание);
- находить корни многочленов с одной переменной, раскладывать многочлены на множители.
- использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.

В результате изучения данной программы учащиеся 2 года обучения должны знать:

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике;

- применение математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- понятие функции как математической модели, описывающей разнообразие реальных зависимостей;
- определение основных свойств функции;
- определение определённого интеграла; связь первообразной и площади криволинейной трапеции;
- свойства показательной и логарифмической функций.
- свойства геометрических фигур и тел.

уметь:

- уметь выполнять по известным формулам и правилам преобразования числовых и буквенных выражений, вычислять их значения, включая степени, радикалы, логарифмические и тригонометрические функции;
- строить графики линейной, квадратичной, степенной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций;
- решать иррациональные, показательные и логарифмические уравнения и неравенства;
- строить и исследовать простейшие математические модели, решать задачи на составление уравнений и систем уравнений;
- выполнять действия с геометрическими фигурами
- вычислять объёмы и площади поверхностей пространственных тел при решении практических задач;
- использовать при необходимости знания алгебры и геометрии в повседневной жизни, применяя справочный материал и вычислительные устройства;
- проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений;
- анализировать реальные числовые данные, информацию статистического характера;
- осуществлять практические расчёты по формулам и пользуясь оценкой и прикидкой.

Способы определения результативности:

- наблюдение за активностью и качеством работы учащихся на занятиях;
- беседы с учащимися и их родителями;
- анализ зачетных, контрольных и творческих работ;
- анкетирование учащихся;
- тестирование;
- проведение олимпиад.

Программа рассчитана **на 64 учебных часа при реализации в объеме 2 академических часов в неделю** для учащихся первого года обучения, и **на 64 учебных часа при реализации в объеме 2 академических часов в неделю** для учащихся второго года обучения. Срок реализации программы – 1- 2 года.

Реализация данной программы выражается в успешном усвоении знаний, в выступлениях учащихся на городских, краевых, региональных научно-практических конференциях, участии в олимпиадах, интеллектуальных конкурсах.

Учебно-тематический план программы

«Довузовский курс математики»

1 год обучения (для учащихся 15-16 лет)

№ п/п	Тема	Общее количество часов	В том числе	
			Теоретические часы	Практические часы
1	Числа и выражения. Преобразования числовых и алгебраических выражений.	**8**	**4**	**4**
2	Свойства простейших функций. Применение производной для исследования функций.	**6**	**2**	**4**
3	Уравнения и системы уравнений.	**12**	**4**	**8**
4	Неравенства. Решение неравенства. Понятие о равносильных неравенствах. Системы и совокупности неравенств.	**8**	**2**	**6**
5	Тригонометрия. Тригонометрический круг. Определение тригонометрических функций. Свойства тригонометрических функций, графики.	**8**	**4**	**4**

6	Задачи на составление уравнений.	**10**	**2**	**8**
7	Производная. Геометрический и физический смысл.	**2**	**1**	**1**
8	Аксиомы стереометрии и их простейшие свойства.	**2**	**1**	**1**
9	Декартовы координаты и векторы в пространстве.	**4**	**1**	**3**
10	Элементы комбинаторики.	**4**	**2**	**2**
	ИТОГО:	**64**	**23**	**41**

Календарный учебный график (1 год обучения)

№ п/п	Дата проведения	Кол-во часов	Тема занятия	Форма проведения	Место проведения	Форма контроля
			Числа и выражения(8часов).			
Занятие 1 - 2	1 неделя	2	***Входной контроль – тестирование.*** Действительные числа: натуральные, целые, рациональные, иррациональные. Признаки делимости.	Тестирование	ЧУДО «ЦОКМ»	Предварительный контроль (входное тестирование)
Занятие 3 - 4	2 неделя	2	Модуль действительного числа, свойства модуля. Решение простейших уравнений и неравенств, содержащих знак модуля.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
Занятие 5 - 6	3 неделя	2	Проценты и пропорции. Степени и корни.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
Занятие 7 - 8	4 неделя	2	Преобразование числовых и алгебраических выражений.	Лекция, беседа, наблюдение, практические задания	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
			Свойства простейших функций(6часов).			
Занятие 9 - 10	5 неделя	2	Понятие функции. Способы задания функции. Область определения. Множество значений функции. График функции. Возрастание и убывание функции; периодичность, четность, нечетность. Чтение графиков и диаграмм.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос

Занятие 11 - 12	6 неделя	2	***Текущий контроль №1 – практическая работа.*** Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции. Достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке. Применение производной. Линейная функция. Дробно-линейная функция.	Практическая работа.	ЧУДО «ЦОКМ»	Текущая диагностика
Занятие 13 - 14	7 неделя	2	Квадратичная функция. Выделение полного квадрата. Построение графиков простейших функций и функций, содержащих аргумент под знаком модуля.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
			Уравнения и системы уравнений (14 часов).			
Занятие 15 - 16	8 неделя	2	Уравнения. Общие положения. Понятие равносильности уравнений. Линейные уравнения, системы линейных уравнений. Геометрическая интерпретация систем линейных уравнений. Уравнения и системы, сводящиеся к линейным. Решение примеров и текстовых задач.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
Занятие 17 - 18	9 неделя	2	Квадратные уравнения и уравнения к ним сводящиеся. Теорема Виета и ее применение к решениям задач.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа

Занятие 19 - 20	10 неделя	2	Многочлены с одной переменной. Нахождение рациональных и целых корней многочлена с целыми коэффициентами. Деление многочлена. Теорема Безу. Решение уравнений высших степеней.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
Занятие 21 - 22	11 неделя	2	Решение уравнений, содержащих знак абсолютной величины.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
Занятие 23 - 24	12 неделя	2	Построение графиков функций, содержащих знак абсолютной величины.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
Занятие 25 - 26	13 неделя	2	***Текущий контроль №2 – практическая работа.*** Иррациональные уравнения. Появление «лишних» корней. Возведение обеих частей уравнения в четную степень.	Практическая работа	ЧУДО «ЦОКМ»	Текущая диагностика
Занятие 27 - 28	14 неделя	2	Решение систем алгебраических уравнений.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
			Неравенства и системы неравенств (8 часов).			
Занятие 29 - 30	15 неделя	2	Свойства числовых неравенств. Действия над неравенствами. Решение линейных, квадратных неравенств и неравенств к ним сводящимся.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
Занятие 31 - 32	16 неделя	2	Рациональные неравенства. Особенности работы с неравенствами.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа

			Схема решений рациональных неравенств. Метод интервалов. Решение неравенств, содержащих знаки абсолютной величины.			
Занятие 33 - 34	17 неделя	2	Системы и совокупности неравенств. Геометрическая интерпретация решения систем линейных неравенств.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
Занятие 35 - 36	18 неделя	2	Иррациональные неравенства. Равносильные преобразования.	Лекция, беседа, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
			Тригонометрия(8часов).			
Занятие 37 - 38	19 неделя	2	Основные тригонометрические формулы. Тождественные преобразования тригонометрических выражений.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
Занятие 39 - 40	20 неделя	2	Тригонометрические уравнения и неравенства. Основные методы решения уравнений. Отбор решений. Решение тригонометрических неравенств с помощью тригонометрического круга.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
Занятие 41 - 42	21 неделя	2	***Текущий контроль №3 – решение уравнений.*** Системы тригонометрических уравнений.	Решение уравнений	ЧУДО «ЦОКМ»	Текущая диагностика
Занятие 43 - 44	22 неделя	2	Тригонометрические уравнения и неравенства с параметром.	Лекция, беседа, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
			Задачи на составление уравнений (10 часов).			
Занятие 45 - 46	23 неделя	2	Задачи на движение.	Лекция, беседа, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос

Занятие 47 – 48	24 неделя	2	Задачи на работу.	Лекция, беседа, наблюдение, решение задач	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
Занятие 49 - 50	25 неделя	2	Задачи на проценты.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар, решение задач	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
Занятие 51 - 52	26 неделя	2	Задачи на смеси и сплавы.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар, решение задач	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
Занятие 53 - 54	27 неделя	2	Задачи с целыми неизвестными.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар, решение задач.	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
			Аксиомы стереометрии (2 часа).			
Занятие 55 - 56	28 неделя	2	Основные понятия стереометрии. Аксиомы стереометрии и их связь с аксиомами планиметрии.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
			Декартовы координаты и векторы в пространстве (4часа).			
Занятие 57 - 58	29 неделя	2	Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между точками. Координаты середины отрезка. Угол между прямой и плоскостью. Угол между плоскостями.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
Занятие 59 - 60	30 неделя	2	Векторы в пространстве. Абсолютная величина и направление вектора. Равенство векторов. Координаты вектора. Сложение векторов и его свойства.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа

			Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.			
			Элементы комбинаторики (4 часа).			
Занятие 61 - 62	31 неделя	2	***Промежуточный контроль – тестирование.*** Метод математической индукции. Комбинаторные принципы сложения и умножения.	Тестирование	ЧУДО «ЦОКМ»	Промежуточная диагностика
Занятие 63 - 64	32 неделя	2	Основные формулы комбинаторики. Элементы теории вероятностей и математической статистики.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа

Содержание программы «Довузовский курс математики»

1 год обучения, 64 академических часов

Тема № 1. Числа и выражения. Преобразования числовых и алгебраических выражений.

Действительные числа: натуральные, целые, рациональные, иррациональные. Признаки делимости.

Модуль действительного числа, свойства модуля. Решение простейших уравнений и неравенств, содержащих знак модуля.

Проценты и пропорции.

Степени и корни.

Преобразование числовых и алгебраических выражений.

Тема № 2. Свойства простейших функций.

Понятие функции. Способы задания функции. Область определения. Множество значений функции.

График функции. Возрастание и убывание функции; периодичность, четность, нечетность. Чтение графиков и диаграмм.

Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции. Достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке. Применение производной.

Линейная функция. Дробно-линейная функция.

Квадратичная функция. Выделение полного квадрата. Построение графиков простейших функций и функций, содержащих аргумент под знаком модуля.

Тема № 3. Уравнения и системы уравнений.

Уравнения. Общие положения. Понятие равносильности уравнений.

Линейные уравнения, системы линейных уравнений. Геометрическая интерпретация систем линейных уравнений. Уравнения и системы, сводящиеся к линейным. Решение примеров и текстовых задач.

Квадратные уравнения и уравнения к ним сводящиеся.

Теорема Виета и ее применение к решениям задач.

Многочлены с одной переменной. Нахождение рациональных и целых корней многочлена с целыми коэффициентами. Деление многочлена. Теорема Безу.

Решение уравнений высших степеней.

Решение уравнений, содержащих знак абсолютной величины. Построение графиков функций, содержащих знак абсолютной величины.

Иррациональные уравнения. Появление «лишних» корней. Возведение обеих частей уравнения в четную степень.

Решение алгебраических систем уравнений.

Тема № 4. Неравенства. Решение неравенства. Понятие о равносильных неравенствах.

Свойства числовых неравенств. Действия над неравенствами.

Решение линейных, квадратных неравенств и неравенств к ним сводящимся.

Рациональные неравенства. Особенности работы с неравенствами. Схема решений рациональных неравенств. Метод интервалов.

Решение неравенств, содержащих знаки абсолютной величины.

Системы и совокупности неравенств.

Геометрическая интерпретация решения систем линейных неравенств.

Иррациональные неравенства. Равносильные преобразования.

Тема № 5. Тригонометрия. Тригонометрический круг. Определение тригонометрических функций. Свойства тригонометрических функций, графики.

Основные тригонометрические формулы. Тождественные преобразования тригонометрических выражений.

Тригонометрические уравнения и неравенства. Основные методы решения уравнений. Отбор решений. Решение тригонометрических неравенств с помощью тригонометрического круга.

Системы тригонометрических уравнений.

Тригонометрические уравнения и неравенства с параметром.

Тема № 6. Задачи на составление уравнений.

Задачи на движение. Задачи на работу. Задачи на проценты. Задачи на смеси и сплавы. Задачи с целыми неизвестными.

Арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия и бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Тема № 7. Производная. Применение производной.

Тема № 8. Аксиомы стереометрии и их простейшие свойства.

Основные понятия стереометрии. Аксиомы стереометрии и их связь с аксиомами планиметрии.

Тема № 9. Декартовы координаты и векторы в пространстве.

Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между точками. Координаты середины отрезка. Угол между прямой и плоскостью. Угол между плоскостями. Векторы в пространстве. Абсолютная величина и направление вектора. Равенство векторов. Координаты вектора. Сложение векторов и его свойства. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.

Тема № 10. Элементы комбинаторики.

Метод математической индукции.

Комбинаторные принципы сложения и умножения.

Основные формулы комбинаторики.

Элементы теории вероятностей и математической статистики.

Учебно-тематический план программы

«Довузовский курс математики»

2 год обучения (для учащихся 16-18 лет)

№ п/п	Тема	Общее количество часов	В том числе	
			Теоретические часы	Практические часы
1	Тригонометрические выражения.	**4**	**2**	**2**
2	Тригонометрические функции.	**4**	**2**	**2**
3	Тригонометрические уравнения.	**10**	**4**	**6**
4	Логарифмические и показательные уравнения и неравенства.	**10**	**4**	**6**
5	Производная и ее применение.	**6**	**2**	**4**
6	Параллельность прямых и плоскостей.	**2**	**1**	**1**
7	Перпендикулярность прямых и плоскостей.	**2**	**1**	**1**
8	Многогранники.	**6**	**2**	**4**
9	Тела вращения.	**6**	**2**	**4**
10	Объемы тел и площади их поверхностей.	**8**	**2**	**6**
11	Задачи с параметрами.	**6**	**2**	**4**
ИТОГО:		**64**	**24**	**40**

Календарный учебный график (2 год обучения)

№ п/п	Дата проведения	Кол-во часов	Тема занятия	Форма проведения	Место проведения	Форма контроля
			Тригонометрические выражения (4часа).			
Занятие 1 - 2	1 неделя	2	Синус, косинус, тангенс и котангенс числового аргумента. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
Занятие 3 - 4	2 неделя	2	***Входной контроль – тестирование.*** Формулы приведения. Преобразование и вычисление значений тригонометрических выражений.	Тестирование	ЧУДО «ЦОКМ»	Предварительная диагностика
			Тригонометрические функции (4часа).			
Занятие 5 - 6	3 неделя	2	Тригонометрические функции: синус, косинус, тангенс и котангенс; область определения и множество значений тригонометрических выражений. Их свойства: возрастание и убывание, экстремумы, сохранение знака, периодичность, ограниченность.	Лекция, беседа, наблюдение, практические задания	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
Занятие 7 – 8	4 неделя	2	Графики синуса и косинуса. Простейшие тригонометрические уравнения.	Лекция, беседа, наблюдение, практические задания	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
			Тригонометрические уравнения (10 часов).			

Занятие 9 - 10	5 неделя	2	Арксинус, арккосинус, и арктангенс числа. Решений простейших тригонометрических уравнений.	Семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
Занятие 11 - 12	6 неделя	2	Методы решения тригонометрических уравнений: метод введения новой переменной и метод разложения на множители.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
Занятие 13 – 14	7 неделя	2	Однородные тригонометрические уравнения.	Семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
Занятие 15 - 16	8 неделя	2	Применение формул синуса и косинуса суммы и разности аргументов при решении уравнений.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
Занятие 17 - 18	9 неделя	2	Решение тригонометрических уравнений, применяя различные методы.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
			Логарифмические и показательные уравнения и неравенства(10 часов).		ЧУДО «ЦОКМ»	
Занятие 19 - 20	10 неделя	2	Решение простейших показательных уравнений. Логарифм числа. Основное логарифмическое тождество. Действия над логарифмами. Логарифмирование и потенцирование. Модуль перехода. Тождественные преобразования логарифмических и показательных выражений.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
Занятие 21 - 22	11 неделя	2	***Текущий контроль №1 – решение уравнений.*** Показательная и логарифмическая функции. Свойства и их графики.	Решение уравнений	ЧУДО «ЦОКМ»	Текущая диагностика

Занятие 23 - 24	12 неделя	2	Основные типы показательных уравнений и неравенств, методы их решений.	Семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
Занятие 25 - 26	13 неделя	2	Основные типы логарифмических уравнений и неравенств, методы их решений.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
Занятие 27 - 28	14 неделя	2	Неалгебраические системы уравнений.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
			Производная и её применение (6 часов).			
Занятие 29 - 30	15 неделя	2	Вычисление производной, правила дифференцирования.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
Занятие 31 - 32	16 неделя	2	Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
Занятие 33 - 34	17 неделя	2	***Текущий контроль №2 – вычисление и применение производной (тест).*** Исследование функций с помощью производной.	Тестирование	ЧУДО «ЦОКМ»	Текущая диагностика
			Параллельность прямых и плоскостей (2часа).			
Занятие 35 - 36	18 неделя	2	Основные понятия в пространстве. Понятие о принадлежности точек и прямых плоскостям. Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые. Пересекающиеся и параллельные прямая и плоскость. Признак параллельности прямой и плоскости. Параллельные и пересекающиеся плоскости. Равенство отрезков параллельных прямых, заключенных между параллельными	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа

			плоскостями. Параллельность линий пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.			
			Перпендикулярность прямых и плоскостей(2 часа).			
Занятие 37 - 38	19 неделя	2	Перпендикулярные прямые в пространстве. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Свойства перпендикулярности прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Теорема о трех перпендикулярах. Признак перпендикулярности плоскостей. Свойства параллельности и перпендикулярности плоскостей.	Лекция, беседа, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
			Многогранники (6 часов).			
Занятие 39 - 40	20 неделя	2	Двугранный и многогранный углы. Линейный угол двугранного угла. Многогранники. Сечения многогранников.	Семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
Занятие 41 - 42	21 неделя	2	Призма. Прямая и правильная призмы. Параллелепипед.	Лекция, беседа, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
Занятие 43 - 44	22 неделя	2	Пирамида. Правильная пирамида. Теорема о сечениях пирамиды, параллельных ее основанию. Правильные многогранники. Тетраэдр, гексаэдр (куб) и октаэдр, икосаэдр, додекаэдр.	Семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	
			Тела вращения (6 часов).			

Занятие 45 - 46	23 неделя	2	Сечения тел вращения. Прямой круговой цилиндр. Сечения цилиндра.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар, решение задач	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
Занятие 47 – 48	24 неделя	2	Прямой круговой конус. Сечения конуса. Сфера и шар. Сечения шара. Касательная плоскость к сфере.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар, решение задач.	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
Занятие 49 - 50	25 неделя	2	Комбинации многогранников и тел вращения.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
			Объемы тел и площади их поверхностей (8 часов).			
Занятие 51 - 52	26 неделя	2	Площадь поверхности: площадь поверхности цилиндра, конуса и сферы.	Беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
Занятие 53 - 54	27 неделя	2	Определение объема, представление объема интегралом. Объемы некоторых тел – цилиндра, конуса, шара.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа
Занятие 55 - 56	28 неделя	2	Решение задач на вычисление поверхностей и объёмов многогранников и тел вращения.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальный опрос
Занятие 57 - 58	29 неделя	2	***Текущий контроль №3 – зачёт по геометрическим формулам (S и V).*** Решение задач на вычисление поверхностей и объёмов многогранников и тел вращения.	Тестирование	ЧУДО «ЦОКМ»	Текущая диагностика
			Задачи с параметрами(6 часов).			
Занятие 59 - 60	30 неделя	2	Существование корней квадратного уравнения. Знаки корней.	Лекция, беседа, наблюдение, семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа

			Расположение корней квадратного трехчлена в зависимости от параметра.			
Занятие 61 - 62	31 неделя	2	***Итоговый контроль – тестирование.*** Уравнения, неравенства, системы уравнений с параметрами. Графические интерпретации.	Тестирование	ЧУДО «ЦОКМ»	Итоговый контроль
Занятие 63 - 64	32 неделя	2	Основные методы решения задач с параметрами.	Семинар	ЧУДО «ЦОКМ»	Фронтальная беседа

Содержание программы «Довузовский курс математики»

2 год обучения, 64 академических часов

Тема № 1. Тригонометрические выражения.

Синус, косинус, тангенс и котангенс числового аргумента. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента. Формулы приведения. Преобразование и вычисление значений тригонометрических выражений.

Тема № 2. Тригонометрические функции.

Тригонометрические функции: синус, косинус, тангенс и котангенс; область определения и множество значений тригонометрических выражений. Их свойства: возрастание и убывание, экстремумы, сохранение знака, периодичность, ограниченность. Графики синуса и косинуса. Простейшие тригонометрические уравнения.

Тема № 3. Тригонометрические уравнения.

Арксинус, арккосинус, и арктангенс числа. Приемы решений тригонометрических уравнений.

Методы решения тригонометрических уравнений: метод введения новой переменной и метод разложения на множители.

Однородные тригонометрические уравнения.

Применение формул синуса и косинуса суммы и разности аргументов при решении уравнений.

Решение тригонометрических уравнений, применяя различные методы.

Тема № 4. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства.

Решение простейших показательных уравнений. Логарифм числа. Основное логарифмическое тождество. Действия над логарифмами. Логарифмирование и потенцирование. Модуль перехода. Тождественные преобразования логарифмических и показательных выражений.

Показательная и логарифмическая функции. Свойства и их графики.

Основные типы показательных уравнений и неравенств, методы их решений.

Основные типы логарифмических уравнений и неравенств, методы их решений.

Неалгебраические системы уравнений.

Тема № 5. Производная и ее применение.

Вычисление производной, правила дифференцирования.

Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.

Исследование функций с помощью производной.

Тема № 6. Параллельность прямых и плоскостей.

Основные понятия в пространстве. Понятие о принадлежности точек и прямых плоскостям. Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые. Пересекающиеся и параллельные прямая и плоскость. Признак параллельности прямой и плоскости. Параллельные и пересекающиеся плоскости. Равенство отрезков параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями. Параллельность линий пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

Тема № 7. Перпендикулярность прямых и плоскостей.

Перпендикулярные прямые в пространстве. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Свойства перпендикулярности прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Теорема о трех перпендикулярах. Признак перпендикулярности плоскостей. Свойства параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Тема № 8. Многогранники.

Двугранный и многогранный углы. Линейный угол двугранного угла. Многогранники. Сечения многогранников.

Призма. Прямая и правильная призмы.

Параллелепипед.

Пирамида. Правильная пирамида. Теорема о сечениях пирамиды, параллельных ее основанию.

Правильные многогранники. Тетраэдр, гексаэдр (куб) и октаэдр, икосаэдр, додекаэдр.

Тема № 9. Тела вращения.

Сечения тел вращения. Прямой круговой цилиндр. Сечения цилиндра. Прямой круговой конус. Сечения конуса. Сфера и шар. Сечения шара. Касательная плоскость к сфере.

Комбинации многогранников и тел вращения.

Тема № 10. Объемы тел и площади их поверхностей.

Площадь поверхности: площадь поверхности цилиндра, конуса и сферы. Определение объема, представление объема интегралом. Объемы некоторых тел – цилиндра, конуса, шара .Решение задач на вычисление поверхностей и объёмов многогранников и тел вращения.

Тема № 11. Задачи с параметрами.

Существование корней квадратного уравнения. Знаки корней.

Расположение корней квадратного трехчлена в зависимости от параметра.

Уравнения, неравенства, системы уравнений с параметрами. Графические интерпретации.

Основные методы решения задач с параметрами.

Методическое обеспечение программы

«Довузовский курс математики» (1 год обучения)

Данная программа дополнительного образования обеспечивается методической и учебной литературой по профилю, методическими пособиями, подготовленными преподавателями высших учебных заведений с учетом требований к абитуриентам, мультимедийными программами, разработками открытых занятий, дидактическим материалом, тестовыми заданиями. Для повышения уровня математической подготовки преподаватели на занятиях используют материалы, предложенные высшими учебными заведениями: вариантами контрольных работ, олимпиадных заданий, тренировочными тестами.

Содержание программы реализуется в учебнике, организующем процесс обучения, и в других компонентах учебно-методического комплекса: в справочниках, учебных пособиях. Для информационно-компьютерной поддержки учебного процесса предполагается использование программно-педагогических средств, реализуемых с помощью компьютера: использование программы «Домашний репетитор», мультимедийные программы, электронный репетитор.

Для обработки, передачи, систематизации информации применяются компьютерные технологии. Дидактический материал содержится на информационных носителях (CD– диски, DVD–диски, дискеты), что позволяет учащимся осуществлять повторение материала.

«Довузовский курс математики» (2 год обучения)

Данная программа дополнительного образования обеспечивается методической и учебной литературой по профилю, методическими пособиями, подготовленными преподавателями высших учебных заведений с учетом требований к абитуриентам, мультимедийными программами, разработками открытых занятий, дидактическим материалом, тестовыми заданиями. Для повышения уровня математической подготовки преподаватели на занятиях используют материалы, предложенные высшими учебными заведениями: вариантами контрольных работ, олимпиадных заданий, тренировочными тестами.

Содержание программы реализуется в учебнике, организующем процесс обучения, и в других компонентах учебно-методического комплекса: в справочниках, учебных пособиях. Для информационно-компьютерной поддержки учебного процесса предполагается использование программно-педагогических средств, реализуемых с помощью компьютера: использование программы «Домашний репетитор», мультимедийные программы, электронный репетитор.

Для обработки, передачи, систематизации информации применяются компьютерные технологии. Дидактический материал содержится на информационных носителях (CD– диски, DVD–диски, дискеты), что позволяет учащимся осуществлять повторение материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Г.Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11классы. Учебник для учащихся. М.: Мнемозина, 2014.

2. А.Г.Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11классы. Задачник для учащихся. М.: Мнемозина, 2014.

3. Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев, Л.С.Киселева, Э.Г.Позняк. Геометрия. Учебник для учащихся. М.: Просвещение, 2014.

4. С.М.Никольский и др. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Учебник для учащихся. М.: Просвещение, 2012.

5. Ф.Ф.Лысенко, С.Ю.Кулабухова. ЕГЭ – 2019. Математика. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов. Ростов – на – Дону, Легион, 2018.

6. Ф.Ф.Лысенко, С.Ю.Кулабухова. ЕГЭ – 2020. Математика. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов. Ростов – на – Дону, Легион, 2019.

7. И.В.Ященко. ЕГЭ. 3300 задач с ответами. Математика. Профильный уровень. М.: Экзамен. 2016.

8. Денищева Л.О., Карюхина Н.В., Михеева Т.Ф. Учимся решать уравнения и неравенства: Учебно-методическое пособие для 10-11 классов. – М.: Интеллект-Центр, 1999.

9. Контрольно-измерительные материалы для подготовки к ЕГЭ по математике. Под редакцией С.Г. Кириенко. – Томск: ТОИПКРО, 2006.

10. Соколов Б. В. Готовимся к экзаменам. Математика. Задачи с параметрами. – Томск: ТГУ, 2003.

11. Соколов Б.В., Хмылева Т.Е. Математика. Варианты олимпиадных заданий ТГУ. – Томск: ТГУ, 2007.

12. Основной сайт: https://ege.sdamgia.ru/

Задания учащимся 1 года обучения.

Входной контроль.

1. Найдите остаток от деления на 19 числа 671.

2. Найдите значение выражения $(5x – 16)(5x + 16) – 25x^2 – 29$

при $x = 120$

3. Запишите периодическую дробь 0,(35) в виде обыкновенной

дроби.

4. Запишите неравенство и решите его:

а) $3x + 2$ больше -4, но меньше 6;

б) при каких значениях x произведение $(x + 1)(x – 2)(2x + 5)$

неотрицательное ?

5. Решите уравнение: $x^2 + 6x + 7 = |x + 3|$

Текущий контроль № 1 по математике

в 10 классе за 1полугодие.

1.Вычислите: а) $2\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; б) $\operatorname{ctg}\left(\arccos \frac{1}{2} – \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. Решите уравнение: $2\sin^2 x – 5 \sin x + 2 = 0$

3. Задает ли указанное правило функцию $y = f(x)$:

1) $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ если } -2 < x \le 0, \\ \sqrt{x} - 1, \text{ если } x \ge 0; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } 0 \le x < 2, \\ x + 1, \text{ если } x \ge 2? \end{cases}$

В случае положительного ответа:

а) найдите область определения функции;

б) вычислите значения функции в точках 0, 1, 3, – 1;

в) постройте график функции;

г) найдите промежутки монотонности функции.

4. Исследуйте функцию $y = -\frac{1}{x^5} + 4x^3$ на четность.

5. Построить график функции: $y = |2x - 3|$.

1) $y = |x^2 + 4x - 1|$,

3) $y = 8 / (|x| - 2)$

4) $y = |(|x| - 3)^2 - 2|$.

Текущий контроль № 3.

2. Решите уравнение: а) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$,

б) $\sin^2 x - \cos x \sin x = 0$,

в) $3\sin^2 x + 7\cos x - 3 = 0$.

3. Найдите корни уравнения $\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, принадлежащие

промежутку $\left(0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

Промежуточный контроль.

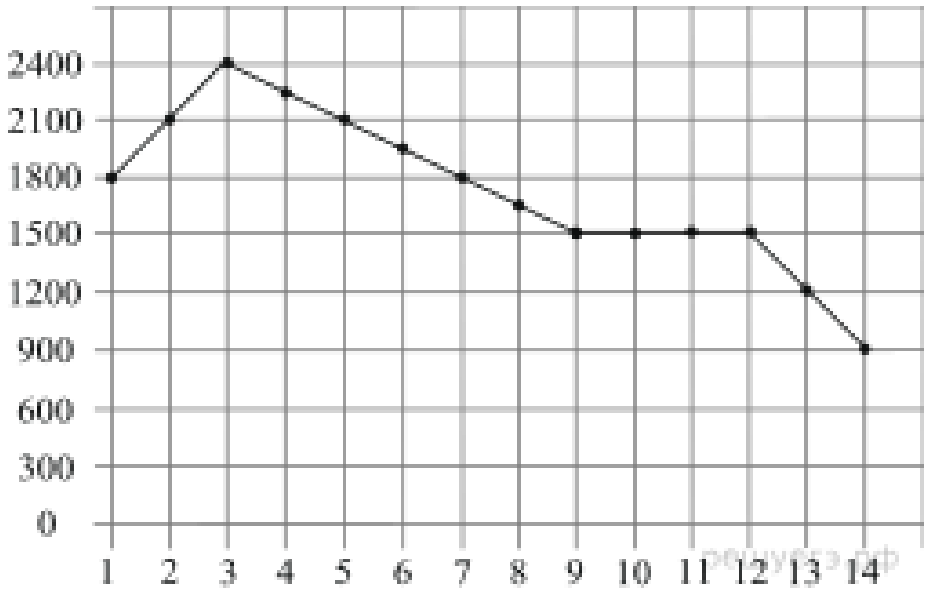
Вариант

1. Задание 1 № 26630

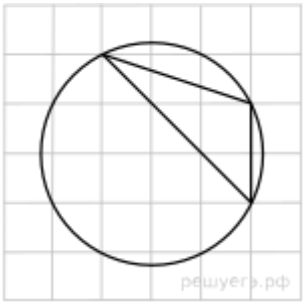
Футболка стоила 800 рублей. После снижения цены она стала стоить 680 рублей. На сколько процентов была снижена цена на футболку?

2. Задание 2 № 531636

На графике представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — стоимость акции в рублях. 2 ноября бизнесмен приобрел 10 акций этой компании. Шесть из них он продал 6 ноября, а 13 ноября — остальные 4. Известно, что цена акций убывала линейно. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



3. Задание 3 № 525598



На клетчатой бумаге с размером клетки $\sqrt{5}\times\sqrt{5}$ изображён треугольник. Найдите радиус его описанной окружности.

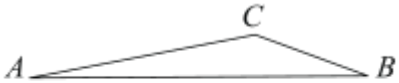
4. Задание 4 № 320173

Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

5. Задание 5 № 77367

Решите уравнение $\frac{13x}{2x^2-7}=1.$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

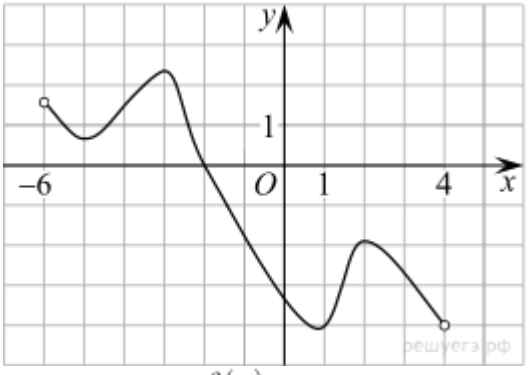
6. Задание 6 № 27922



решуегэ.рф

Сторона AB треугольника ABC с тупым углом C равна радиусу описанной около него окружности. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

7. Задание 7 № 508225



Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-6;4)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите абсциссу точки, в которой функция $y=f(x)$ принимает наибольшее значение.

8. Задание 8 № 323852

Первый и второй насосы наполняют бассейн за 9 минут, второй и третий — за 14 минут, а первый и третий — за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

Задания для контроля учащимся 2 года обучения.

Входной контроль.

1. Найдите значение $-4\sqrt{3}\cos(-750^\circ)$.

2. Упростите выражение: $12+7\sin^2x+7\cos^2x$

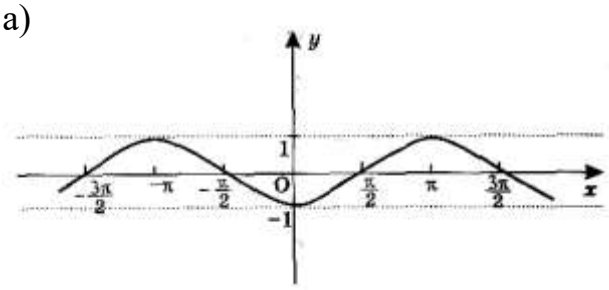
а) 12 б) 7 в) 26 г) 19

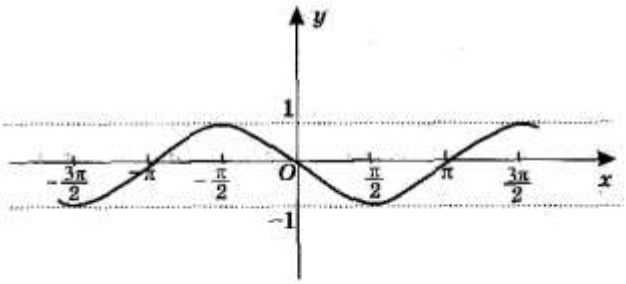
3. Решите уравнение cos x= $\frac{\sqrt{3}}{2}$

а) $\pm \frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\epsilon Z$ б) $\pm \frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\epsilon Z$ в) $\pm \frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\epsilon Z$ г) $\pm \frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\epsilon Z$

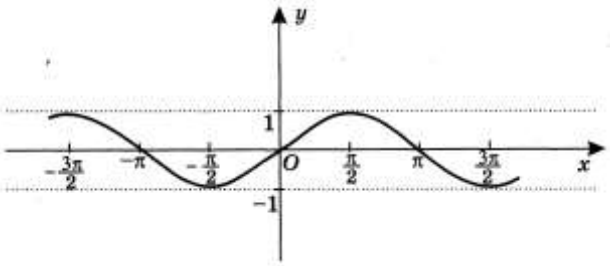
4. Укажите, на каком рисунке изображен график функции y= sinx.

а)

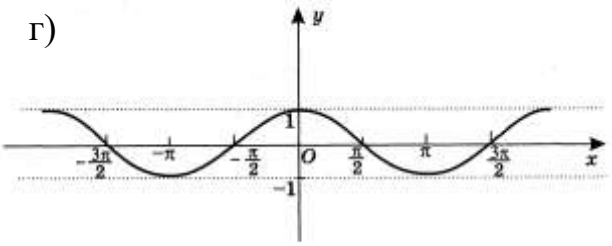




в)



г)



5. Вычислите: $\sin\frac{3\pi}{2} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}$

а) 1,5 б) - 0,5 в) 0,5 г) 1

6. Найдите множество значений функции y= cosx – 3

а) [-1;1] б) [- ∞; + ∞] в) [- 4;- 2] г) [2;4]

7. Вычислите: $5\operatorname{tg}17^\circ \cdot \operatorname{tg}107^\circ$

8. Вычислите: $5\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Текущий контроль № 1.

Решите уравнение:

1). $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$,

2). $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$,

3). $3\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$,

4). $\sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + 1$.

Текущий контроль № 2.

1. Найдите значение $f'(3)$, если $f(x) = 4x^3 - 2x - 40$.

a) 48; b) 36; c) 98; d) 106; e) 102.

2. Найдите область определения функции $y = \frac{5}{x+3} + 4x$

a) $x \neq -3$; b) $x \neq 3$; c) $x \in (-\infty;-3)$; d) $x \neq 0$; e) $x \in (3;+\infty)$.

3. Исследуйте функцию $f(x) = x^2+2x-3$ на экстремум

a) x = -4, т.*min;* b) x =1, т. *max*; c) x = -1, т. *max*; d) x =4, т.*min*;

e). x = -1, т.*min.*

4. Установите соответствие:

уравнение:	решение уравнения:
	$a)\pi n$
	$b) -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$1.\sin x = -1$	$c)\pi + 2\pi n$
$2.\sin x = 0$	$d) -\frac{\pi}{2} + \pi t$
$3.\cos x = -1$	$e)2\pi r$
	f) другое решение.

5. Найдите производную функции $f(x) = (3-4x)^3$

a) $-4(3-4x)^3$; b) $-9(3-4x)^2$; c) $3(3-4x)^2$; d) $-12(3-4x)^2$;

e)$12(3-4x)$.

6. Найдите промежутки убывания функции $f(x)=x^3-6x^2+5$

a) $[0;\infty)$; b) $(-\infty;\infty)$; c) $[0;4]$; d) $(-\infty;0]\cup[4;\infty)$; e) $[-4;0]$.

7. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции

f(x) = $2x^3 - 5x$ в точке M (2;6)

a) $tg\alpha=19$; b) $tg\alpha=13$; c) $tg\alpha=17$; d) $tg\alpha=8$; e) $tg\alpha=29$.

8. Решите неравенство $\frac{x^2-x-6}{81+x^2}<0$

a) (-2;3); b) (-1;-3); c) (1;-5); d) (6;1); e) (5;4).

9. Вычислите $arc\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

a) 45^0; b) 145^0; c) 60^0; d) 30^0; e) 160^0.

<u>Текущий контроль № 3. Зачёт по геометрическим формулам.</u>

S фигур	Треугольники:	разносторонние, прямоугольные, равносторонние	Четырёх-угольники:	квадрат, прямоугольник, параллелограмм, ромб, трапеция	Круг. Длина окружности

$S_{пп}$	Многогранники:		Круглые тела:		
	Призмы	пирамиды	цилиндр	конус	сфера
V					шар
	Отношение элементов подобных фигур:	линейных размеров:	площадей,	объёмов.	

Итоговый контроль.

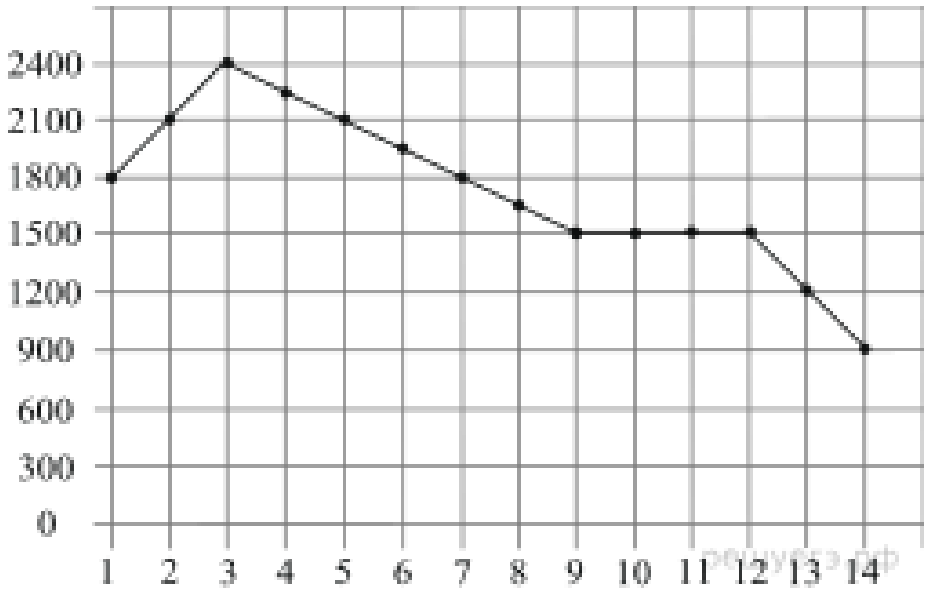
Вариант

1. Задание 1 № 26630

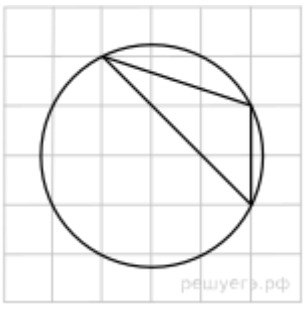
Футболка стоила 800 рублей. После снижения цены она стала стоить 680 рублей. На сколько процентов была снижена цена на футболку?

2. Задание 2 № 531636

На графике представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — стоимость акции в рублях. 2 ноября бизнесмен приобрел 10 акций этой компании. Шесть из них он продал 6 ноября, а 13 ноября — остальные 4. Известно, что цена акций убывала линейно. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



3. Задание 3 № 525598



На клетчатой бумаге с размером клетки $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ изображён треугольник. Найдите радиус его описанной окружности.

4. Задание 4 № 320173

Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

5. Задание 5 № 77367

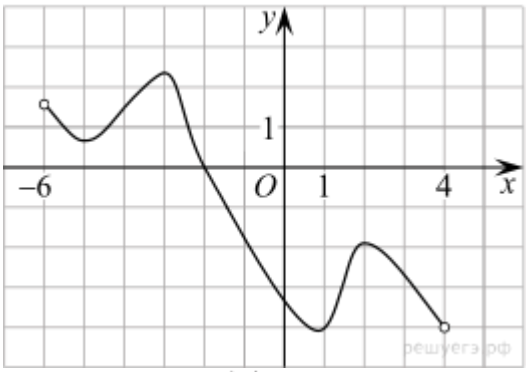
Решите уравнение $\dfrac{13x}{2x^2-7}=1.$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

6. Задание 6 № 27922



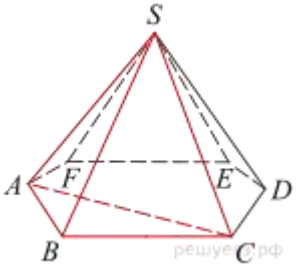
Сторона AB треугольника ABC с тупым углом C равна радиусу описанной около него окружности. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

7. Задание 7 № 508225



Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-6;4)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите абсциссу точки, в которой функция $y=f(x)$ принимает наибольшее значение.

8. Задание 8 № 509573



Найдите объём правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF*, если объём треугольной пирамиды *SABC* равен 33.

9. Задание 9 № 77401

Найдите значение выражения $\dfrac{g(x-9)}{g(x-11)}$, если $g(x)=8^x$.

10. Задание 10 № 28008

При нормальном падении света с длиной волны $\lambda=400$ нм на дифракционную решетку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решетке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d\sin\varphi=k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решетке с периодом, не превосходящим 1600 нм?

11. Задание 11 № 323852

Первый и второй насосы наполняют бассейн за 9 минут, второй и третий — за 14 минут, а первый и третий — за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

12. Задание 12 № 245181

Найдите точку максимума функции $y=11^{6x-x^2}$.

13. Задание 13 № 521994

а) Решите уравнение $8\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{12}+x\right)-2\sqrt{3}\cos 2x=5.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};-\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вариант № 34489999

1. Задание 1 № 318581

Бегун пробежал 50 м за 5 секунд. Найдите среднюю скорость бегуна на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.

Решение.

Средняя скорость бегуна 50 : 5 = 10 м/с. Переведем метры в секунду в километры в час:

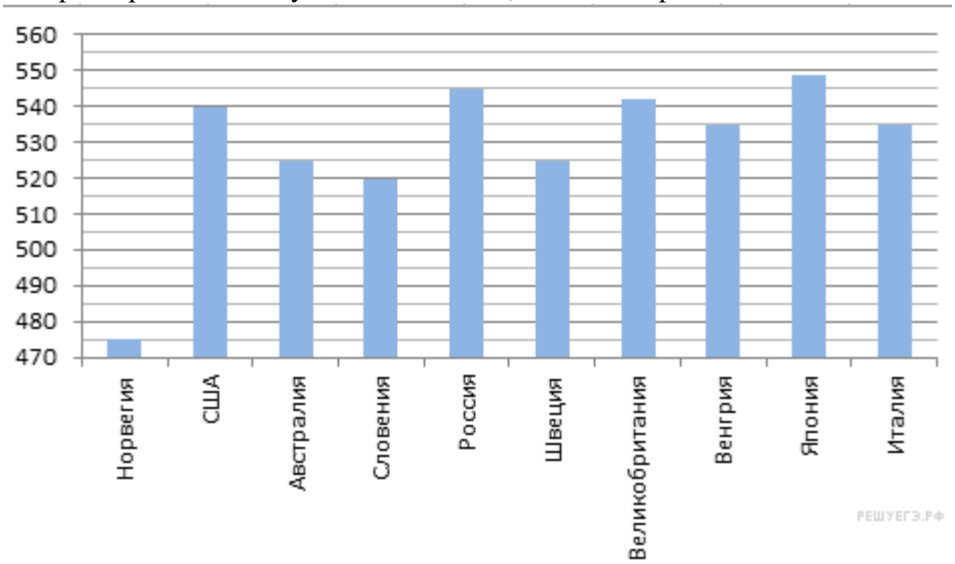
1 м/с = 60 м/мин = 3600 м/ч = 3,6 км/ч.

Поэтому 10 м/с = 36 км/ч.

Ответ: 36.

2. Задание 2 № 505160

На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 4-го класса, по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). По данным диаграммы найдите число стран, в которых средний балл участников выше, чем в Венгрии.

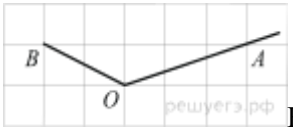


Решение.

Из диаграммы видно, что число стран, в которых средний балл по естествознанию выше чем в Венгрии равно четырём.

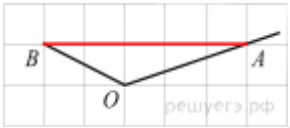
Ответ: 4.

3. Задание 3 № 27459



Найдите тангенс угла AOB. Сторона одной клетки равна 1.

Решение.



Достроим угол до треугольника BOA. Из рисунка находим: $OA=\sqrt{10}$, $OB=\sqrt{5}$, $AB=5$. Воспользуемся теоремой косинусов:

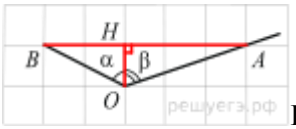
$$AB^2=OB^2+OA^2-2OB\cdot OA\cdot\cos AOB.$$

Тогда:

$$\cos AOB=\frac{OB^2+OA^2-AB^2}{2OB\cdot OA}=\frac{5+10-25}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Поэтому угол AOB равен 135°, а его тангенс равен −1.

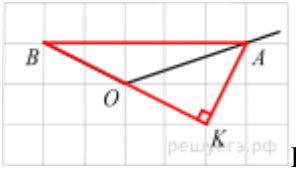
Ответ: −1.



Приведём другое решение.

Пусть $\alpha = \widehat{BOH}, \beta = \widehat{AOH},$ тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BH}{HO} = 2, \operatorname{tg}\beta = \frac{AH}{HO} = 3,$ и, следовательно,

$$\operatorname{tg}\widehat{BOA} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1.$$



Приведём другое решение.

Отложим на продолжении прямой BO за точку O отрезок $OK = BO$ и проведём отрезок AK. Заметим, что $OK = KA = \sqrt{5}, \ OA = \sqrt{10}.$ Поэтому треугольник OKA — прямоугольный равнобедренный, углы при его основании равны 45°, а тогда $\widehat{BOA} = 135^\circ,$ и $\operatorname{tg}\widehat{BOA} = -1.$

4. Задание 4 № 320187

При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

В ответе укажите наименьшее необходимое количество выстрелов.

Решение.

Найдем вероятность противоположного события, состоящего в том, что цель не будет уничтожена за *n* выстрелов. Вероятность промахнуться при первом выстреле равна 0,6, а при каждом следующем — 0,4. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятности этих событий. Поэтому вероятность промахнуться при *n* выстрелах равна: $0,6 \cdot 0,4^{n-1}.$

Осталось найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$0,6 \cdot 0,4^{n-1} < 0,02 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} < \frac{1}{30}.$$

Последовательно проверяя значения n, равные 1, 2, 3 и т. д. находим, что искомым решением является $n = 5.$ Следовательно, необходимо сделать 5 выстрелов.

Ответ: 5.

Примечание.

Можно решать задачу «по действиям», вычисляя вероятность уцелеть после ряда последовательных промахов:

$P(1) = 0,6.$

$P(2) = P(1)\cdot 0{,}4 = 0{,}24.$
$P(3) = P(2)\cdot 0{,}4 = 0{,}096.$
$P(4) = P(3)\cdot 0{,}4 = 0{,}0384;$
$P(5) = P(4)\cdot 0{,}4 = 0{,}01536.$

Последняя вероятность меньше 0,02, поэтому достаточно пяти выстрелов по мишени.

Приведем другое решение.

Вероятность поразить мишень равна сумме вероятностей поразить ее при первом, втором, третьем и т. д. выстрелах. Поэтому задача сводится к нахождению наименьшего натурального решения неравенства

$$0{,}4 + 0{,}6\cdot 0{,}6 + 0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6 + 0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6 + \ldots + 0{,}6^2\cdot 0{,}4^{n-2} \geq 0{,}98.$$

В нашем случае неравенство решается подбором, в общем случае понадобится формула суммы геометрической прогрессии, использование которой сведет задачу к простейшему логарифмическому неравенству.

5. Задание 5 № 26669

Найдите корни уравнения: $\cos\dfrac{\pi(x-7)}{3} = \dfrac{1}{2}.$ В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\cos\frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi(x-7)}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \Leftrightarrow x - 7 = \pm 1 + 6n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 + 6n; \\ x = 6 + 6n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Значениям $n \geq 0$ соответствуют положительные корни.

Если $n = -1$, то $x = 2$ и $x = 0$.

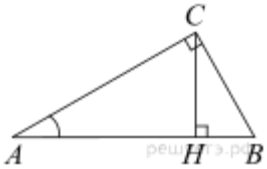
Если $n = -2$, то $x = 8 - 12 = -4$ и $x = 6 - 12 = -6$.

Значениям $n \leq -3$ соответствуют меньшие значения корней.

Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число -4.

Ответ: −4.

6. Задание 6 № 27265



В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, $AB = 13$, $\operatorname{tg} A = \dfrac{1}{5}.$ Найдите AH.

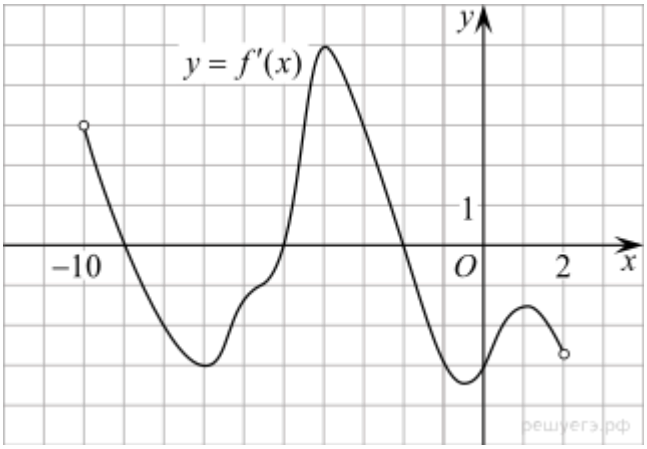
Решение.

Имеем:

$$AH = AC\cos A = AB\cos^2 A = AB\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 A} = 13\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{25}} = 13\cdot\frac{25}{26} = 12{,}5.$$

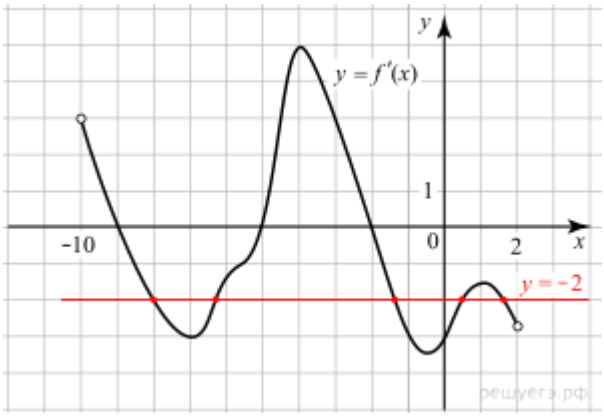
Ответ: 12,5.

7. Задание 7 № 27501



На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−10; 2). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции *f(x)* параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.

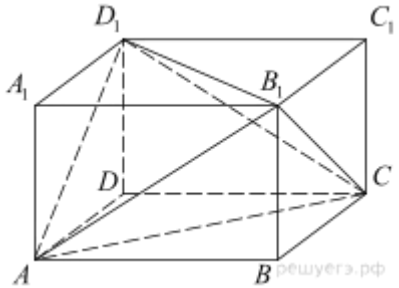
Решение.



Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны –2. Найдем количество точек, в которых $f'(x) = -2$, это соответствует количеству точек пересечения графика производной с прямой $y = -2$. На данном интервале таких точек 5.

Ответ: 5.

8. Задание 8 № 27209



Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 4,5. Найдите объем треугольной пирамиды AD_1CB_1.

Решение.

Искомый объем равен разности объемов параллелепипеда и четырех пирамид, основания которых являются гранями данной треугольной пирамиды. Объём каждой из этих пирамид равен одной трети произведения площади основания на высоту, а площадь основания вдвое меньше площади основания параллелепипеда:

$$V_{\text{пир}} = V_{\text{пар}} - 4\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot V_{\text{пар}}\right) = \frac{1}{3}V_{\text{пар}} = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

9. Задание 9 № 26804

Найдите $p(x)+p(6-x)$, если $p(x)=\dfrac{x(6-x)}{x-3}$ при $x\neq 3$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$p(x)+p(6-x)=\frac{x(6-x)}{x-3}+\frac{(6-x)(6-(6-x))}{(6-x)-3}=\frac{x(6-x)}{x-3}-\frac{x(6-x)}{x-3}=0.$$

Ответ: 0.

10. Задание 10 № 27953

При температуре $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ рельс имеет длину $l_0=10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^{\circ})=l_0(1+\alpha\cdot t^{\circ})$, где $\alpha=1{,}2\cdot 10^{-5}(^{\circ}\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $l(t^{\circ})-l_0=3$ мм при заданных значениях длины $l_0=10$ м и коэффициента теплового расширения $\alpha=1{,}2\cdot 10^{-5}\ (^{\circ}\mathrm{C})^{-1}$:

$$l(t^{\circ})-l_0=3\cdot 10^{-3}\Leftrightarrow l_0(1+\alpha\cdot t^{\circ})-l_0=3\cdot 10^{-3}\Leftrightarrow l_0\alpha t^{\circ}=3\cdot 10^{-3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\cdot 1{,}2\cdot 10^{-5}t^{\circ}=3\cdot 10^{-3}\Leftrightarrow t^{\circ}=\frac{3\cdot 10^{-3}}{1{,}2\cdot 10^{-4}}\Leftrightarrow t^{\circ}=25\ ^{\circ}\mathrm{C}.$$

Ответ: 25.

11. Задание 11 № 99597

Первый велосипедист выехал из поселка по шоссе со скоростью 15 км/ч. Через час после него со скоростью 10 км/ч из того же поселка в том же направлении выехал второй велосипедист, а еще через час после этого – третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 2 часа 20 минут после этого догнал первого. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть v км/ч – скорость третьего велосипедиста, а t ч – время, которое понадобилось ему, чтобы догнать второго велосипедиста. Таким образом,

$$vt=10\cdot(t+1)\Leftrightarrow v=\frac{10\cdot(t+1)}{t}.$$

А через 2 часа 20 минут после этого догнал первого. Таким образом,

$$v\cdot\left(t+\frac{7}{3}\right)=15\cdot\left(t+\frac{7}{3}+2\right)\Leftrightarrow\frac{10\cdot(t+1)\cdot(3t+7)}{3t}=\frac{15}{3}\cdot(3t+13)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6t^2+20t+14=9t^2+39t\Leftrightarrow 3t^2+19t-14=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{-19+\sqrt{19^2+4\cdot 3\cdot 14}}{6}=\dfrac{2}{3};\\ t=\dfrac{-19-\sqrt{19^2+4\cdot 3\cdot 14}}{6}=-7\end{array}\right.\overset{t>0}{\Leftrightarrow}t=\frac{2}{3}.$$

$$v=\frac{10\cdot\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}}=25.$$

Таким образом,

Ответ: 25.

12. Задание 12 № 315127

Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^x + 3$ на отрезке $[1;2]$.

Решение.

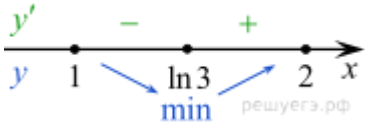
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 2e^{2x} - 6e^x = 2e^x(e^x - 3).$$

Найдем нули производной:

$$2e^x(e^x - 3) = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3.$$

Отметим на рисунке нули производной и поведение функции на заданном отрезке:



Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является ее значение в точке минимума. Найдем его:

$$y(\ln 3) = e^{2\ln 3} - 6e^{\ln 3} + 3 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 3 = -6.$$

Ответ: −6.

13. Задание 13 № 507572

а) Решите уравнение $\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} = 4.$

б) Найдите решения уравнения, принадлежащие отрезку $[2\sqrt{3} + 1; 10]$.

Решение.

а) Сделаем замену переменной: $y = \sqrt{x-4}.$ Получаем $y^2 = x - 4$ или $x = y^2 + 4.$ Тогда:

$$\sqrt{y^2 + 4y + 4} + \sqrt{y^2 - 4y + 4} = 4 \Leftrightarrow |y+2| + |y-2| = 4.$$

Заметим, что $y \geq 0$ и поэтому, $y + 2 > 0,$ получаем:

$$y + 2 + |y - 2| = 4 \Leftrightarrow |y - 2| = 2 - y.$$

Равенство $|a| = -a$ верно только для неположительных значений a. Поэтому $y - 2 \leq 0,$ откуда

$$\sqrt{x-4} \leq 2 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 8.$$

б) В силу цепочки неравенств $4 = 3 + 1 = \sqrt{9} + 1 < \sqrt{12} + 1 = 2\sqrt{3} + 1 < \sqrt{49} + 1 = 8 < 10$ из всех решений уравнения на отрезке $[2\sqrt{3} + 1; 10]$ лежат только решения $[2\sqrt{3} + 1; 8].$

Ответ: а) $[4;\ 8]$ б) $[2\sqrt{3} + 1; 8].$

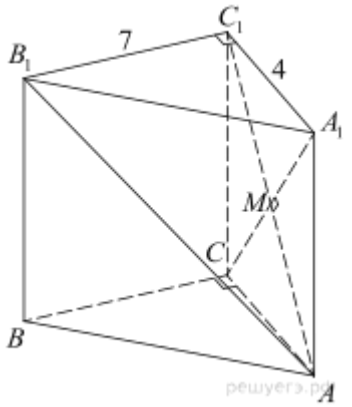
14. Задание 14 № 517563

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Грань ACC_1A_1 является квадратом.

а) Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 4$, $BC = 7$.

Решение.



а) Заметим, что $B_1C_1 \perp C_1A_1$ как катеты прямоугольного треугольника, и $B_1C_1 \perp C_1C$, поскольку призма прямая. Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $B_1C_1 \perp ACA_1$. Кроме того, $A_1C \perp C_1A$ как диагонали квадрата. AB_1 – наклонная, AC_1 – ее проекция на плоскость ACA_1, A_1C – прямая в плоскости ACA_1, перпендикулярная проекции. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $AB_1 \perp CA_1$, что и требовалось доказать.

б) Пусть M – середина AC_1. Тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки M до прямой AB_1, поскольку прямая A_1C перпендикулярна плоскости AB_1C_1. Это расстояние равно половине высоты прямоугольного треугольника AB_1C_1, проведённой к гипотенузе, то есть

$$d = \frac{AC_1 \cdot B_1C_1}{2AB_1} = \frac{\sqrt{2}AC \cdot BC}{2\sqrt{2AC^2 + BC^2}} = \frac{14\sqrt{2}}{9}.$$

$\frac{14\sqrt{2}}{9}$.

Ответ: б)

15. Задание 15 № 507254

Решите неравенство:

$$\log_3 \frac{1}{x} + \log_3(x^2 + 3x - 9) \le \log_3\left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10\right).$$

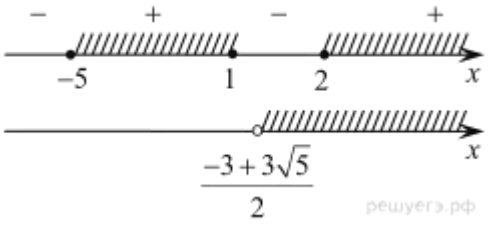
Решение.

Решим неравенство:

$$\log_3 \frac{1}{x} + \log_3(x^2+3x-9) \le \log_3\left(x^2+3x+\frac{1}{x}-10\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2+3x-9) \le \log_3(x^3+3x^2+1-10x), \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-9 \le x^3+3x^2+1-10x, \\ x^2+3x-9>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-9 \le x^3+3x^2+1-10x, \\ \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2}, \\ x > \dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}, \end{array}\right. \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+2x^2-13x+10 \ge 0, \\ x > \dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2+3x-10) \ge 0, \\ x > \dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2.$$



Ответ: $[2;\ +\infty)$.

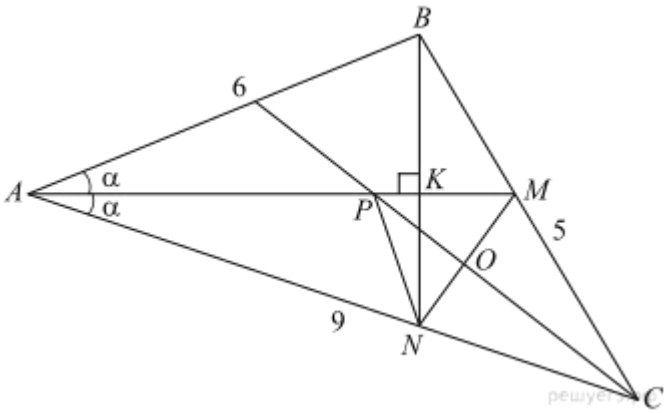
16. Задание 16 № 505501

В треугольнике ABC проведена биссектриса AM. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM, пересекает сторону AC в точке N. $AB = 6$; $BC = 5$; $AC = 9$.

а) докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам

б) пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите отношение $AP : PN$.

Решение.



а) Обозначим K точку пересечения отрезков AM и BN. Треугольник ABN равнобедренный, так как в нем AK является биссектрисой и высотой. Следовательно, AK является и медианой, то есть K — середина BN. Получаем, что $AN = AB = 6$, откуда $NC = AC - AN = 3$.

Рассмотрим треугольник ABC, биссектриса делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам: $BM : MC = AB : AC$, учитывая, что длина BC равна 5, получаем: $BM = 2$; $MC = 3$.

В треугольнике MNC стороны NC и MC равны, следовательно, треугольник MNC — равнобедренный, с основанием MN. Значит, биссектриса угла C также является медианой и высотой. Таким образом, получаем, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.

б) Рассмотрим треугольник PMN: отрезок PO перпендикулярен прямой MN и делит её пополам, следовательно, треугольник PMN — равнобедренный с основанием MN. Значит, $PM = PN$ и отношение $AP : PN = AP : PM$.

В треугольнике AMC отрезок CP — биссектриса, поэтому $AP : PM = AC : MC = 3 : 1$.

Ответ: 3 : 1.

17. Задание 17 № 506958

Антон взял кредит в банке на срок 6 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на одно и то же число процентов (месячную процентную ставку), а затем уменьшается на сумму, уплаченную Антоном. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Общая сумма выплат превысила сумму кредита на 63%. Найдите месячную процентную ставку.

Решение.

Пусть сумма кредита S у.е., процентная ставка банка x %.

Предложение «Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину» означает: Антон взятую сумму возвращал в банк равными долями. Сумма, образованная применением процентной ставки, составляет:

$$0,01xS+0,01x\cdot\frac{5S}{6}+0,01x\cdot\frac{4S}{6}+\ldots+0,01x\cdot\frac{2S}{6}+0,01x\cdot\frac{S}{6}=0,01Sx\cdot\left(1+\frac{5}{6}+\frac{4}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)=$$

$$=0,01Sx\cdot\frac{1+\frac{1}{6}}{2}\cdot 6=0,01Sx\cdot\frac{6+1}{2}=0,035Sx.$$

(у.е.)

Общая сумма, выплаченная Антоном за 6 месяцев: $S+0,035Sx=(1+0,035x)\cdot S$ (у.е.). А эта сумма по условию задачи равна $1,63S$ у.е. Решим уравнение:

$$(1+0,035x)S=1,63S\Leftrightarrow 1+0,035x=1,63\Leftrightarrow 0,035x=0,63\Leftrightarrow x=18.$$

Ответ: 18.

18. Задание 18 № 519477

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ((x+5)^2+y^2-a^2)\ln(9-x^2-y^2)=0, \\ ((x+5)^2+y^2-a^2)(x+y-a+5)=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

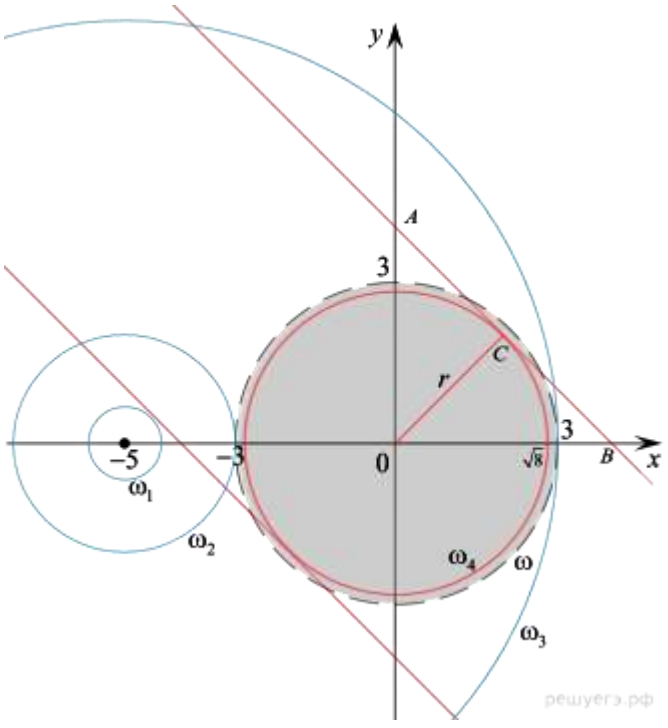
Заметим, что на области определения системы уравнений справедлива равносильность

$$\begin{cases} A\cdot B=0, \\ A\cdot C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0, \\ \begin{cases} B=0, \\ C=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Тогда при условии существования логарифма $x^2+y^2<9$ имеем два случая:

$$(x+5)^2+y^2=a^2 \quad (1) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2+y^2=8, \\ y=-x+(a-5). \end{cases} \quad (2)$$

Изобразим графики полученных уравнений и область определения — внутреннюю часть круга ω радиуса 3 с центром в начале координат (см. рис.) в одной системе координат. Определим, при каких значениях параметра уравнение (1) и система (2) совместно имеют ровно два решения, лежащие в области ω.



Рассмотрим уравнение (1). При $a=0$ уравнение $(x+5)^2+y^2=a^2$ имеет одно решение — пару (−5; 0); точка (−5; 0) не лежит в ω. При прочих значениях параметра уравнение имеет бесконечно много решений. Чтобы исходная система могла иметь ровно два решения, решения уравнения (1) должны лежать вне области определения системы: радиус окружности должен быть таким, что ни одна из ее точек не попадала в область ω. Находим (см. рис.): $|a|\le 2$ или $|a|\ge 8$.

Рассмотрим систему (2). Окружность, задаваемая первым уравнением, может иметь с прямой, задаваемой вторым уравнением, 0, 1 или 2 общие точки. Определим, какие значения параметра соответствуют касанию. Из равнобедренного прямоугольного треугольника *AOC* найдем

$$r=OC=AO\cdot\sin 45^\circ=\frac{|a-5|}{\sqrt{2}}=\sqrt{8},$$

откуда $a=1$ или $a=9$. Следовательно, при $1<a<9$ система имеет два решения. Оба они лежат в области ω.

Тем самым, при $(1;\ 2]\cup[8;\ 9)$ исходная система уравнений имеет ровно два решения.

Ответ: $(1;\ 2]\cup[8;\ 9)$.

19. Задание 19 № 502027

Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?

в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Решение.

Пусть данное число равно $100a+10b+c$, где a, b и c — цифры сотен, десятков и единиц соответственно. Если частное этого числа и суммы его цифр равно k, то выполнено $100a+10b+c=ka+kb+kc$.

а) Если частное равно 90, то $100a+10b+c=90a+90b+90c$; $10a=80b+89c$, что верно, например, при $c=0,\ b=1,\ a=8$ — частное числа 810 и суммы его цифр равно 90.

б) Если частное равно 88, то $100a+10b+c=88a+88b+88c\Leftrightarrow 12a=78b+87c\Leftrightarrow 4a=26b+29c$. Так как $a<10$, то $b=0, c=1$ или $b=1, c=0$. В обоих этих случаях слева получится четное число, а справа нечетное. Значит, частное трёхзначного числа и суммы его цифр не может быть равным 88.

в) Пусть k — наибольшее натуральное значение частного числа, не кратного 100, и суммы его цифр. Тогда

$$100a+10b+c=ka+kb+kc\Leftrightarrow(100-k)a=(k-10)b+(k-1)c.$$

Учитывая, что $b+c>0$, получаем:

$$9(100-k)\geq(100-k)a=(k-10)b+(k-1)c\geq(k-10)(b+c)\geq k-10,$$

откуда $9(100-k)\geq k-10\Leftrightarrow 10k\leq 910\Leftrightarrow k\leq 91$.

Частное числа 910 и суммы его цифр равно 91. Значит, наибольшее натуральное значение частного трёхзначного числа, не кратного 100, и суммы его цифр равно 91.

Ответ: а) да; б) нет; в) 91.

Вариант № 34490000

1. Задание 1 № 26644

Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Константиновна получила 9570 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марии Константиновны?

Решение.

Пусть заработная плата Марии Константиновны составляет x рублей. Тогда

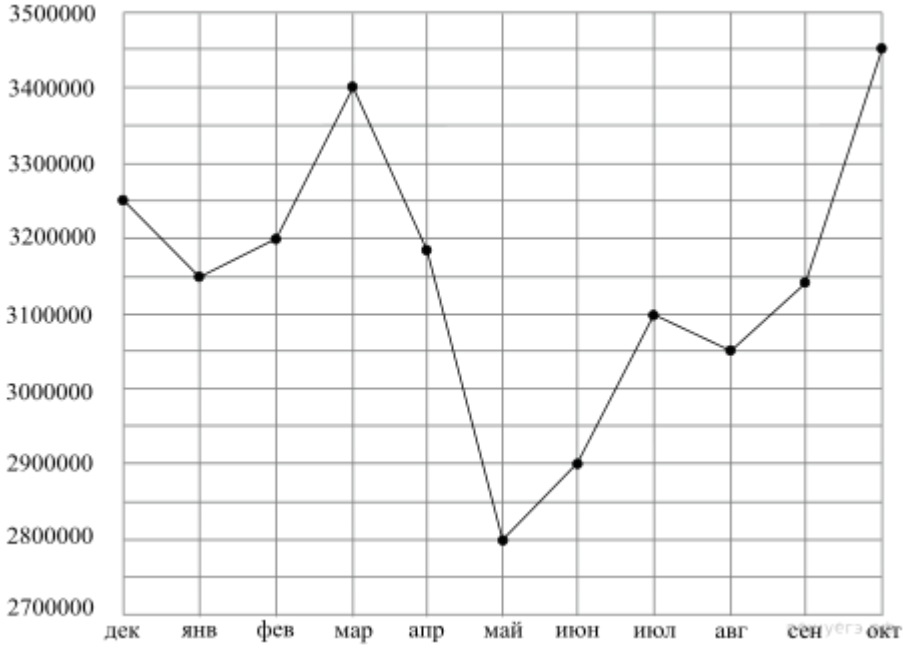
$$x - 0{,}13x = 9570 \Leftrightarrow 0{,}87x = 9570 \Leftrightarrow x = 9570 : 0{,}87 \Leftrightarrow x = 11\,000.$$

Значит, зарплата Марии Константиновны составляет 11 000 рублей.

Ответ: 11 000.

2. Задание 2 № 500948

На рисунке точками показана аудитория поискового сайта Ya.ru во все месяцы с декабря 2008 по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество посетителей сайта хотя бы раз в данном месяце. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей аудиторией сайта Ya.ru в указанный период.

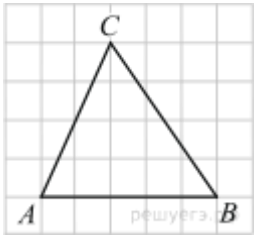


Решение.

Из рисунка видно, что наибольшая аудитория − 3 450 000 посетителей сайт − была октябре, а наименьшая в мае — 2 800 000 посетителей. Найдем разность: 3 450 000 − 2 800 000 = 650 000 посетителей.

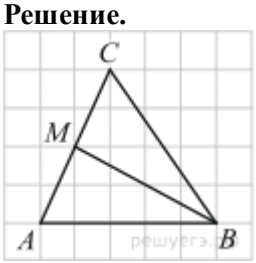
Ответ: 650 000.

3. Задание 3 № 502991



На клетчатой бумаге с квадратными клетками изображён треугольник ABC. Найдите тангенс угла C.

Решение.

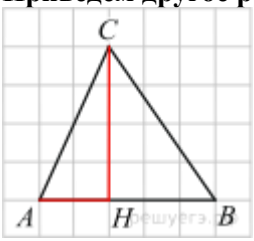


Проведём высоту BM. Треугольник BMC прямоугольный. Тогда тангенс угла C равен

$$\frac{BM}{MC}=\frac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{1+4}}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=\sqrt{4}=2.$$

Ответ: 2.

Приведём другое решение:



Вычислим BC по теореме Пифагора:

$$BC=\sqrt{3^2+4^2}=5,$$

тогда $AB=BC=5$, значит треугольник ABC равнобедренный и $\angle C=\angle A$.

Получаем, что

$$\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A=\frac{CH}{AH}=\frac{4}{2}=2.$$

Ответ: 2.

4. Задание 4 № 500037

Проводится жеребьёвка Лиги Чемпионов. На первом этапе жеребьёвки восемь команд, среди которых команда «Барселона», распределились случайным образом по восьми игровым группам — по одной команде в группу. Затем по этим же группам случайным образом распределяются еще восемь команд, среди которых команда «Зенит». Найдите вероятность того, что команды «Барселона» и «Зенит» окажутся в одной игровой группе.

Решение.

По результатам первой жеребьёвки команда «Барселона» находится в одной из 8 групп. Вероятность того, что команда «Зенит» окажется в той же игровой группе равна одной восьмой.

Ответ: 0,125.

5. Задание 5 № 282850

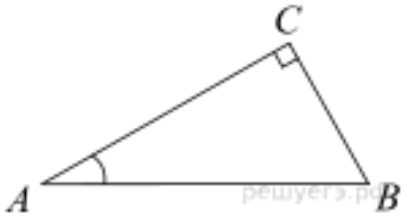
Найдите корень уравнения $(x-1)^3=-8.$

Решение.

Извлекая кубический корень из обеих частей уравнения, получаем $x-1=-2$, откуда $x=-1.$

Ответ: −1.

6. Задание 6 № 27239



В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC=2$, $\sin A=\frac{\sqrt{17}}{17}$. Найдите BC.

Решение.

Имеем:

$$BC=AC\operatorname{tg}A=\frac{AC\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}}{\sqrt{1-\frac{17}{289}}}=2\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\frac{17}{\sqrt{272}}=0,5.$$

Ответ: 0,5.

7. Задание 7 № 27485

Прямая $y=7x-5$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+6x-8.$ Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y=7x-5$ их угловые коэффициенты равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения $y'=7$:

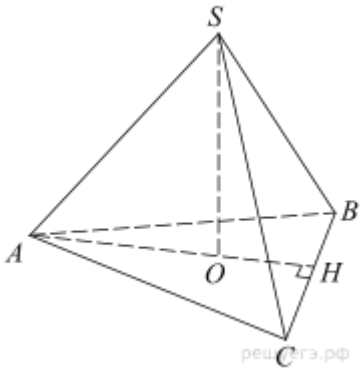
$$(x^2+6x-8)'=7\Leftrightarrow 2x+6=7\Leftrightarrow x=0,5.$$

Ответ: 0,5.

8. Задание 8 № 509117

В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 5, а тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания равен $0,25\sqrt{11}.$ Найти сторону основания пирамиды.

Решение.



Введём обозначения, как показано на рисунке. Выразим длину стороны AC через длину боковой стороны $AS.$ Высота правильного треугольника выражается через его сторону: $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}AC.$ Точкой O высота AH делится в отношении 2 : 1, поэтому $AO=\frac{2}{3}AH=\frac{\sqrt{3}}{3}AC, OH=\frac{1}{3}AH=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\frac{\sqrt{3}}{6}AC.$ Угол SHO равен углу между боковой гранью и плоскостью основания. Из прямоугольного треугольника SOH:

$$SO=OH\operatorname{tg}\angle SHO=\frac{1\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{11}}{4}AC=\frac{\sqrt{33}}{24}AC.$$

Из прямоугольного треугольника AOS по теореме Пифагора:

$$AS=\sqrt{AO^2+SO^2}=\sqrt{\frac{1}{3}AC^2+\frac{11}{192}AC^2}=AC\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{11}{192}}=AC\sqrt{\frac{64+11}{192}}=AC\sqrt{\frac{25}{64}}=\frac{5}{8}AC.$$

Откуда $AC=\frac{8}{5}AS=8.$

Ответ: 8.

9. Задание 9 № 26823

Найдите $2p(x-7)-p(2x),$ если $p(x)=x-3.$

Решение.

Заменяя аргумент в равенстве $p(x)=x-3,$ находим $p(2x)=2x-3$ и $p(x-7)=(x-7)-3=x-10.$ Тогда

$$2p(x-7)-p(2x)=2(x-10)-(2x-3)=-17.$$

Ответ: −17.

10. Задание 10 № 27958

Если достаточно быстро вращать ведерко с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right)$, где m – масса воды в килограммах, v скорость движения ведерка в м/с, L – длина веревки в метрах, g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведерко, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 40 см? Ответ выразите в м/с.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $P(v) \geq 0$ при заданной длине верёвки $L = 0,4$ м:

$$P \geq 0 \Leftrightarrow m\left(\frac{v^2}{L} - g\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{v^2}{0,4} - 10 \geq 0 \Leftrightarrow v^2 \geq 4 \Leftrightarrow v \geq 2 \text{ м/с}.$$

Ответ: 2.

11. Задание 11 № 500253

Весной катер идёт против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

Решение.

Пусть x (км/ч) — собственная скорость катера, y (км/ч) — скорость течения реки весной. Тогда летом она составит $y - 1$ (км/ч); $x > y > 1$. Составим таблицу по данным задачи:

	Весна	Лето
По течению	$x+y$	$x+y-1$
Против течения	$x-y$	$x-y+1$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{3}, \\ \frac{x+y-1}{x-y+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y) = 5(x-y), \\ 2(x+y-1) = 3(x-y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y, \\ x - 5y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20, \\ y = 5. \end{cases}$$

Таким образом, скорость течения весной равна 5 км/ч.

Ответ: 5.

12. Задание 12 № 245175

Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}.$

Решение.

Выделим полный квадрат:

$$y=\sqrt{x^2-6x+13}=\sqrt{(x-3)^2+4}.$$

Отсюда имеем:

$$y=\sqrt{(x-3)^2+4}\geq\sqrt{4}=2.$$

Поэтому наименьшее значние функции достигается в точке 3, и оно равно 2.

Ответ: 2.

Примечание.

Приведем другое решение.

Поскольку функция $y=\sqrt{x}$ возрастающая, а подкоренное выражение положительно при всех значениях переменной, заданная функция достигает наименьшего значения в той же точке, в которой достигает наименьшего значения подкоренное выражение. Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с положительным старшим коэффициентом достигает наименьшего значения в точке $x=-\dfrac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 3, и оно равно 4. Следовательно, наименьшее значение заданной функции $y_{\text{нм}}=\sqrt{4}=2.$

13. Задание 13 № 505308

а) Решите уравнение $\sin 8\pi x+1=\cos 4\pi x+\sqrt{2}\cos\left(4\pi x-\dfrac{\pi}{4}\right).$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2-\sqrt{7};\ \sqrt{7}-2\right].$

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin 4\pi x\cos 4\pi x+1=\cos 4\pi x+\sqrt{2}(\cos 4\pi x\cos\frac{\pi}{4}+\sin 4\pi x\sin\frac{\pi}{4})$$

$$2\sin 4\pi x\cos 4\pi x+1-2\cos 4\pi x-\sin 4\pi x=0$$

$$2\cos 4\pi x(\sin 4\pi x-1)-(\sin 4\pi x-1)=0$$

$$(2\cos 4\pi x-1)(\sin 4\pi x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\cos 4\pi x=1\\ \sin 4\pi x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4\pi x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,n\in\mathbb{Z}\\ 4\pi x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{1}{12}+\dfrac{n}{2},n\in\mathbb{Z},\\ x=\dfrac{1}{8}+\dfrac{k}{2},k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Ограничим каждое полученное решение из пункта «а» и решим эти неравенства:

1)

$$2-\sqrt{7}\leq\frac{1}{12}+\frac{n}{2}\leq\sqrt{7}-2$$

$$\frac{23}{12}-\sqrt{7}\leq\frac{n}{2}\leq\sqrt{7}-\frac{25}{12}$$

$$\frac{23}{6}-2\sqrt{7}\leq n\leq 2\sqrt{7}-\frac{25}{6}\Rightarrow n=-1,0,1\Rightarrow x=\frac{-5}{12},\frac{1}{12},\frac{7}{12}$$

2)

$$2-\sqrt{7}\leq-\frac{1}{12}+\frac{n}{2}\leq\sqrt{7}-2$$

$$\frac{25}{12}-\sqrt{7}\le\frac{n}{2}\le\sqrt{7}-\frac{23}{12}$$

$$\frac{25}{6}-2\sqrt{7}\le n\le 2\sqrt{7}-\frac{23}{6}\Rightarrow n=-1,0,1\Rightarrow x=-\frac{7}{12},-\frac{1}{12},\frac{5}{12}$$

3)

$$2-\sqrt{7}\le\frac{1}{8}+\frac{k}{2}\le\sqrt{7}-2$$

$$1.875-\sqrt{7}\le\frac{k}{2}\le\sqrt{7}-2.125$$

$$3.75-2\sqrt{7}\le k\le 2\sqrt{7}-4.25\Rightarrow k=-1,0,1\Rightarrow x=-\frac{3}{8},\frac{1}{8},\frac{5}{8}$$

Ответ: а) $\{x=\pm\frac{1}{12}+\frac{n}{2},x=\frac{1}{8}+\frac{k}{2}:n\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}\}$, б) $\pm\frac{5}{12},\pm\frac{1}{12},\pm\frac{7}{12},-\frac{3}{8},\frac{1}{8},\frac{5}{8}$.

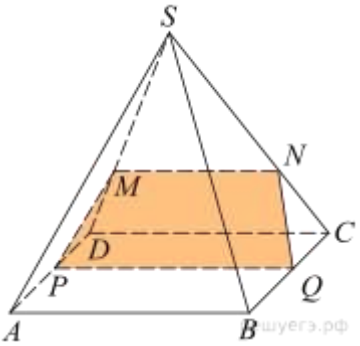
14. Задание 14 № 517541

Дана правильная четырёхугольная пирамида *SABCD* с вершиной *S*. Точка *M* расположена на *SD* так, что *SM* : *SD* = 2 : 3. *P* — середина ребра *AD*, а *Q* середина ребра *BC*.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью *MQP* — равнобедренная трапеция.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость *MQP* разбивает пирамиду.

Решение.



а) Пусть плоскость *MPQ* пересекает *SC* в точке *N*. Так как *PD* = *CQ*, $PD\parallel CQ$, то *PDCQ* — параллелограмм, $PQ\parallel CD$. Поскольку $PQ\parallel CD$, $PQ\subset MPQ$, то $MN\parallel PQ\parallel CD$.

Тогда $\frac{SM}{MD}=\frac{SN}{NC}$, то есть $MD=NC$. Так как $MD=NC$, $CQ=PD$ и $\angle SCB=\angle SDA$, так как пирамида правильная, то $\triangle NCQ=\triangle PDM$, следовательно, $NQ=MP$.

Поскольку $NQ=MP$ и $MN\parallel PQ$, то *MNQP* — равнобедренная трапеция, что и требовалось доказать.

б) Заметим, что $S_{DPQC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$, расстояние от точки *M* до плоскости *ABC* втрое меньше расстояния от точки *S* до плоскости *ABC* . Тогда $\frac{V_{MPDCQ}}{V_{SABCD}}=\frac{1}{6}$.

По теореме об отношении площадей треугольников с равными углами $\frac{S_{\triangle CQN}}{S_{\triangle CSB}}=\frac{CN}{CS}\cdot\frac{CQ}{CB}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$, расстояние от точки *D* до плоскости *SBC*, в 1,5 раза больше чем от точки *M*. Значит, $\frac{V_{MNCQ}}{V_{SABCD}}=\frac{V_{MNCQ}}{2V_{SBCD}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{18}$, из чего следует, что $V_{CQPDMN}=\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{6}\right)V_{SABCD}=\frac{2}{9}V_{SABCD}$, тогда $\frac{V_{CQPDMN}}{V_{PQNMSBA}}=\frac{2}{7}$.

Ответ: б) $\frac{2}{7}$.

15. Задание 15 № 507582

Решите неравенство $\left(x+\frac{3}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \geq 4\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2$.

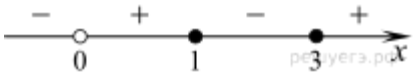
Решение.

Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x \neq 0, \\ 5-x \geq 0, \\ 5-x \neq 1, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x \leq 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2-6x+9}=1$, т. е. $|x-3|=1$ и, значит, $x=2$ или $x=4$. Тем самым, $x=2$ — решение задачи.

2) $\sqrt{x^2-6x+9} \neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2$, получим: $x+\frac{3}{x} \geq 4$, откуда $\frac{(x-1)(x-3)}{x} \geq 0$.



Решим это неравенство, получим: $0<x\leq 1$ или $x \geq 3$.

Учитывая ограничения, получаем множество решений исходного неравенства: $(0;\ 1] \cup \{2\} \cup [3;\ 4) \cup (4;\ 5]$.

Ответ: $(0;\ 1] \cup \{2\} \cup [3;\ 4) \cup (4;\ 5]$.

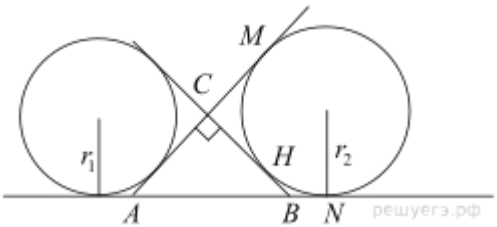
16. Задание 16 № 505568

Прямые, содержащие катеты *AC* и *CB* прямоугольного треугольника *ACB*, являются общими внутренними касательными к окружностям радиусов 2 и 4. Прямая, содержащая гипотенузу *AB*, является их общей внешней касательной.

а) Докажите, что длина отрезка внутренней касательной, проведенной из вершины острого угла треугольника до одной из окружностей, равна половине периметра треугольника *ACB*.

б) Найдите площадь треугольника *ACB*.

Решение.



а) Введём обозначения, как показано на рисунке, пусть *M*, *H*, *N* — точки касания. Касательные, проведённые к окружности из одной точки равны: *AM* = *AN*, *CM* = *CH*, *HB* = *BN*. Поэтому:

$$P = AC + CH + HB + AB = AC + CM + BN + AB = AM + AN = 2AM,$$

откуда *p* = *AM*.

б) Для определения площади треугольника используем формулу, связывающую её с полупериметром, стороной и радиусом вневписанной окружности, касающейся этой стороны и продолжений двух других сторон треугольника:

$$S = (p - AC) \cdot r_1 = (AM - AC) r_1 = CM r_1 = r_2 r_1 = 8.$$

Ответ: $S_{ACB} = 8$.

Примечание: указанная в решении формула легко может быть получена из следующих соображений $S_{ACB} = S_{ABCO_1} - S_{ACO_1}$, где O_1 — центр окружности с радиусом r_1. При этом

$$S_{ACO_1} = \frac{1}{2} AC \cdot r_1,$$

$$S_{ABCO_1} = S_{ABO_1} + S_{BCO_1} = \frac{1}{2} AB \cdot r_1 + \frac{1}{2} BC \cdot r_1 = \frac{1}{2}(AB + BC) \cdot r_1.$$

Тогда

$$S_{ACB} = \frac{1}{2}(AB+BC) \cdot r_1 - \frac{1}{2} AC \cdot r_1 = \frac{1}{2}((AB+BC+AC) - 2AC) \cdot r_1 = \frac{1}{2}(P_{ABC} - 2AC) \cdot r_1 = (p - AC) \cdot r_1.$$

17. Задание 17 № 520787

15-го декабря планируется взят кредит в банке на 1 000 000 рублей на (n + 1) месяц. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;

— к 15-му числу (n + 1)-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

Решение.

По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

1000, 960, 920, ..., 240, 200, 0.

Значит, $n = \frac{1000 - 200}{40} = 20.$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на r %. Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

1000k, 960k, ..., 240k, 200k.

Следовательно,выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$1000(k-1) + 40$, $960(k-1) + 40$, ..., $240(k-1) + 40$, $200k$.

Всего следует выплатить

$$(k-1) \cdot \frac{20 \cdot 1240}{2} + 800 + 200k = 12600k - 11600$$ (тыс. рублей).

Тогда $12\,600k - 11\,600 = 1378$, откуда $12\,600k = 12\,978$, и следовательно, $k = 1{,}03$, то есть $r = 3$.

Ответ: 3.

18. Задание 18 № 484632

При каких значениях параметра a система $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ x^2 + y^2 + a^2 = 2x + 2ay \end{cases}$ имеет решения?

Решение.

Перепишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} (x-1)^2 = y + 1, \\ (y-a)^2 + (x-1)^2 = 1. \end{cases}$$

Исходная система имеет решения, тогда и только тогда, когда относительно y имеет решения система:

$$\begin{cases}(y-a)^2+y+1=1,\\ y+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2+(1-2a)y+a^2=0,\\ y\geq -1.\end{cases}$$

$$y=\frac{2a-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}.$$

Решая уравнение этой системы, находим, что Требование задачи будет выполнено, если последняя смешанная система имеет хотя бы одно решение. Искомые значения a находятся из совокупности неравенств

$$\frac{2a-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}\geq -1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{1-4a}\geq -1-2a,\\ \sqrt{1-4a}\leq 1+2a.\end{array}\right.$$

Иррациональные неравенства можно решить, используя теоремы о равносильности:

$$\sqrt{x}\leq y\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0,\\ y\geq 0,\\ x\leq y^2\end{cases}\qquad \sqrt{x}\geq y\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y<0,\\ x\geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}y\geq 0,\\ x\geq y^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y<0,\\ x\geq 0,\end{cases}\\ x\geq y^2\end{array}\right.$$

и

Получим: $-2\leq a\leq\frac{1}{4}$ или $0\leq a\leq\frac{1}{4}$, что дает $-2\leq a\leq\frac{1}{4}$.

Другой путь решения неравенств — ввести замену $t=\sqrt{1-4a}.$ В этом случае $a=\frac{1}{4}(1-t^2).$ Тогда:

$$t\geq -1-\frac{1}{2}(1-t^2),$$ откуда $$t^2-2t-3\leq 0\underset{t\geq 0}{\Leftrightarrow}0\leq t\leq 3$$

и

$$t\leq 1+\frac{1}{2}(1-t^2),$$ что дает $$t^2+2t-3\leq 0\underset{t\geq 0}{\Leftrightarrow}0\leq t\leq 1.$$

Тем самым, $0\leq t\leq 3.$ Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$0\leq\sqrt{1-4a}\leq 3\Leftrightarrow 0\leq 1-4a\leq 9\Leftrightarrow -1\leq -4a\leq 8\Leftrightarrow -2\leq a\leq\frac{1}{4}.$$

Ответ: $a\in\left[-2,\frac{1}{4}\right].$

19. Задание 19 № 502079

Каждое из чисел a_1, a_2, …, a_{350} равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим

$S_1 = a_1+a_2+...+a_{350}$,
$S_2 = a_1^2+a_2^2+...+a_{350}^2$,
$S_3 = a_1^3+a_2^3+...+a_{350}^3$,
$S_4 = a_1^4+a_2^4+...+a_{350}^4$.

Известно, что $S_1 = 513$.

а) Найдите S_4, если еще известно, что $S_2 = 1097$, $S_3 = 3243$.
б) Может ли $S_4 = 4547$?
в) Пусть $S_4 = 4745$. Найдите все значения, которые может принимать S_2.

Решение.

Пусть количества единиц, двоек, троек и четвёрок среди $a_1, a_2, \ldots, a_{350}$ равны $m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4$ соответственно. Тогда $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 350$ и $m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 = 513.$

а) По условию

$$S_1 = m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 = 513, \quad S_2 = m_1 + 4m_2 + 9m_3 + 16m_4 = 1097,$$

$$S_3 = m_1 + 8m_2 + 27m_3 + 64m_4 = 3243, \text{ где } m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 350.$$

Решая систему четырёх линейных уравнений с четырьмя неизвестными, находим: $m_1 = 282,\ m_2 = 7,\ m_3 = 27,\ m_4 = 34.$ Значит,

$$S_4 = 282 + 16 \cdot 7 + 81 \cdot 27 + 256 \cdot 34 = 11285.$$

б)

Если $S_4 = m_1 + 16m_2 + 81m_3 + 256m_4 = 4547,$ где $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 350,$ то $15m_2 + 80m_3 + 255m_4 = 4197.$ В последнем равенстве левая часть кратна 5, а правая — нет, поэтому S_4 не может быть равным 4547.

в)

Если $S_4 = m_1 + 16m_2 + 81m_3 + 256m_4 = 4745,$ где $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 350,$ то $15m_2 + 80m_3 + 255m_4 = 4395.$ Кроме того, поскольку $m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 = 513.$ получаем:

$$m_2 + 2m_3 + 3m_4 = 163 \Leftrightarrow 15m_2 + 30m_3 + 45m_4 = 2445.$$

Вычтем из первого полученного равенства второе: $50m_3 + 210m_4 = 1950 \Leftrightarrow 5m_3 + 21m_4 = 195.$ Значит, m_4 делится на 5 и может равняться только 0 или 5. При $m_4 = 0$ получаем:

$$m_3 = \frac{195 - 21m_4}{5} = 39,\ m_2 = 163 - 2m_3 - 3m_4 = 85,$$

$$m_1 = 350 - m_2 - m_3 - m_4 = 226,\ S_2 = m_1 + 4m_2 + 9m_3 + 16m_4 = 917.$$

При $m_4 = 5$ получаем:

$$m_3 = \frac{195 - 21m_4}{5} = 18,\ m_2 = 163 - 2m_3 - 3m_4 = 112,$$

$$m_1 = 350 - m_2 - m_3 - m_4 = 215,\ S_2 = m_1 + 4m_2 + 9m_3 + 16m_4 = 905.$$

Ответ: а) 11285; б) нет; в) 905 или 917.

Вариант № 34490001

1. Задание 1 № 318583

Система навигации самолёта информирует пассажира о том, что полёт проходит на высоте 37 000 футов. Выразите высоту полёта в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.

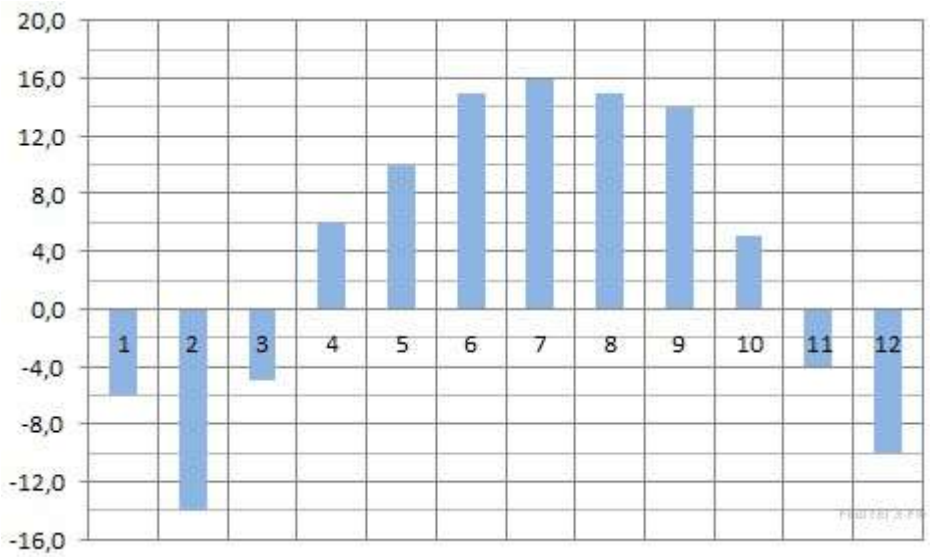
Решение.

Переведем высоту из футов в сантиметры: $37\,000 \cdot 30{,}5 = 1\,128\,500$ см. Переведем высоту из сантиметров в метры: $1\,128\,500 : 100 = 11\,285$ м. Следовательно, полет проходит на высоте 11 285 метров.

Ответ: 11 285.

2. Задание 2 № 27511

На диаграмме показана среднемесячная температура в Нижнем Новгороде (Горьком) за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 1994 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.

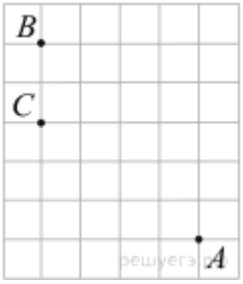


Решение.

Из диаграммы видно, что наименьшая среднемесячная температура составляет −14 °C (см. рисунок).

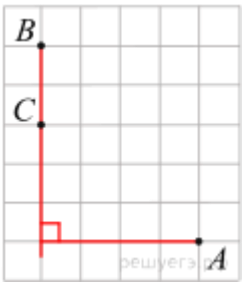
Ответ: −14.

3. Задание 3 № 324465



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A, B и C. Найдите расстояние от точки A до прямой BC.

Решение.



Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую. Тем самым, искомое расстояние равно 4.

Ответ: 4.

4. Задание 4 № 319353

Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение.

Вероятность того, что стекло сделано на первой фабрике и оно бракованное: $0{,}45 \cdot 0{,}03 = 0{,}0135$.

Вероятность того, что стекло сделано на второй фабрике и оно бракованное: $0{,}55 \cdot 0{,}01 = 0{,}0055$.

Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна $0{,}0135 + 0{,}0055 = 0{,}019$.

Ответ: 0,019.

5. Задание 5 № 77369

Решите уравнение $(x-6)^2=-24x.$

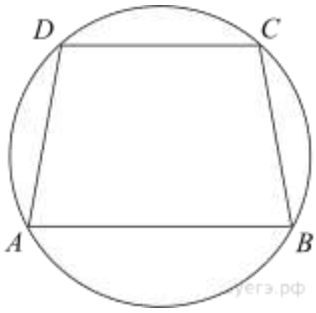
Решение.

Используем формулы квадрата суммы и разности:

$$(x-6)^2=-24x \Leftrightarrow x^2-12x+36=-24x \Leftrightarrow x^2+12x+36=0 \Leftrightarrow (x+6)^2=0 \Leftrightarrow x=-6.$$

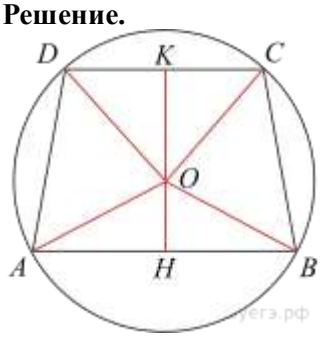
Ответ: −6.

6. Задание 6 № 27926



Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6. Радиус описанной окружности равен 5. Центр окружности лежит внутри трапеции. Найдите высоту трапеции.

Решение.



Высота трапеции $KH=KO+OH,$ где KO и OH — высоты равнобедренных треугольников DOC и AOB. По теореме Пифагора:

$$KO=\sqrt{OC^2-KC^2}=\sqrt{R^2-\frac{DC^2}{4}}=\sqrt{25-9}=4,$$

$$OH=\sqrt{OB^2-HB^2}=\sqrt{R^2-\frac{AB^2}{4}}=\sqrt{25-16}=3.$$

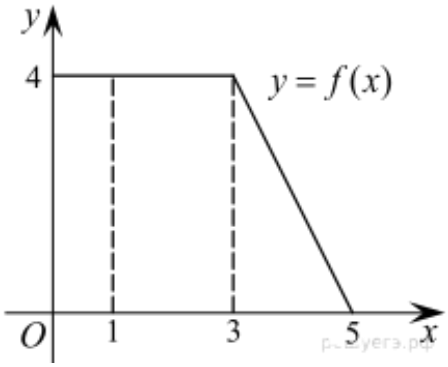
Тогда $KH=KO+OH=7.$

Ответ: 7.

Примечание.

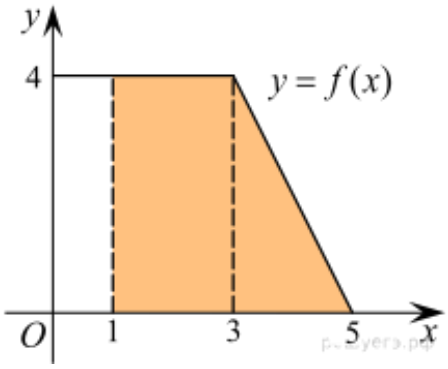
Если бы большее основание трапеции лежало выше центра окружности (то есть оба основания располагались по одну сторону от центра окружности) длина высоты равнялась бы не сумме, а разности найденных отрезков.

7. Задание 7 № 500890



На рисунке изображен график некоторой функции $y=f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл $\int_1^5 f(x)\,dx.$

Решение.

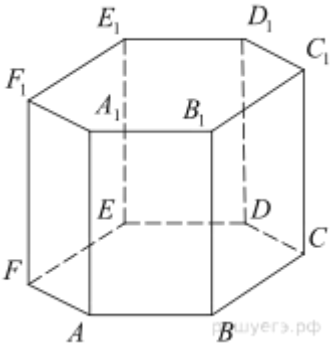


Определенный интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[1;5]$ дает значение площади подграфика функции $f(x)$ на отрезке. Область под графиком разбивается на прямоугольный треугольник, площадь которого $S_{\text{тр}}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4,$ и прямоугольник, площадь которого $S_{\text{пр}}=2\cdot 4=8.$ Сумма этих площадей дает искомый интеграл

$$\int_1^5 f(x)\,dx=S_{\text{пр}}+S_{\text{тр}}=8+4=12.$$

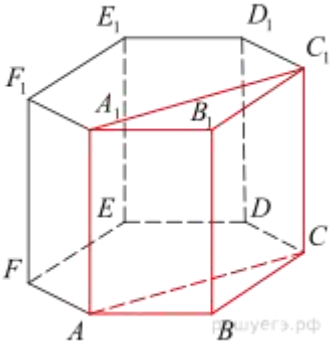
Ответ: 12.

8. Задание 8 № 245344



Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A,B,C,A_1,B_1,C_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 3.

Решение.



Многогранник, объем которого требуется найти, является прямой треугольной призмой. Объем призмы равен произведению площади основания на высоту. Основанием призмы является треугольник.

Площадь правильного шестиугольника в основании равна $6\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$, площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}R\cdot R\sin 120^\circ=\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$, следовательно, площадь треугольника *ABC* равна одной шестой площади основания шестиугольной призмы. Высотой прямой призмы является боковое ребро, его длина равна 3. Таким образом, искомый объем равен $1\cdot 3$.

Ответ: 3.

9. Задание 9 № 504824

Найдите значение выражения $\sqrt{50}\cos^2\frac{9\pi}{8}-\sqrt{50}\sin^2\frac{9\pi}{8}$.

Решение.

Используем формулу косинуса двойного угла $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$:

$$\sqrt{50}\cos^2\frac{9\pi}{8}-\sqrt{50}\sin^2\frac{9\pi}{8}=\sqrt{50}\cos\frac{9\pi}{4}=\sqrt{50}\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{50}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{100}}{2}=5.$$

Ответ: 5.

10. Задание 10 № 525114

Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1V_1^{1,4}=p_2V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 256 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

Решение.

Подставим в формулу $p_1V_1^{1,4}=p_2V_2^{1,4}$, данные из условия: $p_1=1$ атм, $V_1=256$ л, $p_2=128$ атм. Решим полученное уравнение, заметив, что $1,4=\frac{7}{5}$ и возведя обе части уравнения в степень $\frac{5}{7}$:

$$1\cdot 256^{\frac{7}{5}}=128\cdot V_2^{\frac{7}{5}}\Leftrightarrow 256=(2^7)^{\frac{5}{7}}\cdot V_2\Leftrightarrow 256=32V_2\Leftrightarrow V_2=8\,(\text{л}).$$

Ответ: 8.

11. Задание 11 № 99600

Часы со стрелками показывают 8 часов ровно. Через сколько минут минутная стрелка в четвертый раз поравняется с часовой?

Решение.

До четвертой встречи стрелок минутная должна сначала пройти 8 разделяющих их часовых делений (поскольку часы показывают 8 часов), затем 3 раза обойти полный круг, то есть пройти 36 часовых делений, и пройти последние *L* делений, на которые поворачивается часовая стрелка за время движения минутной. Скорость движения минутной стрелки в 12 раз больше часовой: пока часовая обходит один полный круг, минутная проходит 12 кругов. Приравняем время движения часовой и минутной стрелок до их четвертой встречи:

$$\frac{L}{1}=\frac{8+36+L}{12}\Leftrightarrow 12L=L+44\Leftrightarrow L=4.$$

Часовая стрелка пройдет 4 деления, что соответствует 4 часам, то есть 240 минутам.

Ответ: 240.

Приведем арифметическое решение.

Скорость минутной стрелки 1 круг в час, а часовой — $\frac{1}{12}$ круга в час, поэтому скорость удаления или сближения стрелок равна $\frac{11}{12}$ круга в час. Расстояние между стрелками, отсчитываемое по окружности, в начальный момент составляет 40 минут или $\frac{2}{3}$ круга. Чтобы встретиться 4 раза, полный круг минутная стрелка должна обойти три раза. Всего $\frac{2}{3}+3=\frac{11}{3}$ круга. Поэтому необходимое время равно $\frac{11}{3}:\frac{11}{12}=4$ часа или 240 минут.

Приведем другое решение.

Ясно, что в первый раз стрелки встретятся между 8 и 9 часами, второй раз — между 9 и 10 часами, третий — между 10 и 11, четвертый — между 11 и 12 часами, то есть ровно в 12 часов. Таким образом, они встретятся ровно через 4 часа, что составляет 240 минут.

Помещаем решение в общем виде.

Скорость вращения часовой стрелки равна 0,5 градуса в минуту, а минутной — 6 градусов в минуту. Поэтому когда часы показывают время h часов m минут часовая стрелка повернута на $30h + 0{,}5m$ градусов, а минутная — на $6m$ градусов относительно 12-часового деления.

Пусть в первый раз стрелки встретятся через t_1 минут. Тогда если минутная стрелка еще не опережала часовую в течение текущего часа, то $6m + 6t_1 = 30h + 0{,}5m + 0{,}5t_1$, т. е. $t_1 = (60h - 11m)/11$ (*). В противоположном случае получаем уравнение $6m + 6t_1 = 30h + 0{,}5m + 0{,}5t_1 + 360$, откуда $t_1 = (60h - 11m + 720)/11$ (**).

Пусть во второй раз стрелки встретятся через t_2 минут после первого, тогда $0{,}5t_2 = 6t_2 - 360$, откуда $t_2 = 720/11$ (***). Это же верно для каждого следующего оборота.

Поэтому для встречи с номером n из (*) и (**) с учетом (***) имеем соответственно: $t_n = (60h - 11m + 720(n-1))/11$ или $t_n = (60h - 11m + 720n)/11$.

12. Задание 12 № 77500

Найдите точку максимума функции $y=-\frac{x}{x^2+289}$.

Решение.

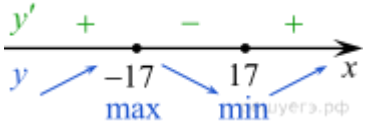
Найдем производную заданной функции:

$$y'=-\left(\frac{x}{x^2+289}\right)'=-\frac{1\cdot\left(x^2+289\right)-x\cdot(2x)}{\left(x^2+289\right)^2}=\frac{x^2-289}{\left(x^2+289\right)^2}.$$

Найдем нули производной:

$$x^2-289=0\Leftrightarrow x^2=289\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=17,\\x=-17.\end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=-17$.

Ответ: −17.

13. Задание 13 № 507426

Решите уравнение: $\sqrt{\sin x\cos x}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}2x}+1\right)=0.$

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$\sqrt{\sin x\cos x}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}2x}+1\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2x}\left(\frac{\operatorname{tg}2x+1}{\operatorname{tg}2x}\right)=0.$$

Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю, а другой при этом существует. Откуда получаем, что

$$\begin{cases}\sin 2x=0,\\ \operatorname{tg}2x\neq 0\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\operatorname{tg}2x+1=0,\\ \sin 2x\geq 0.\end{cases}$$

В первом случае решений нет. Во втором случае:

$$\begin{cases}\operatorname{tg}2x=-1,\\ \sin 2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ \sin 2x>0\end{cases}\Leftrightarrow 2x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{8}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\frac{3\pi}{8}+\pi k:k\in\mathbb{Z}\right\}.$

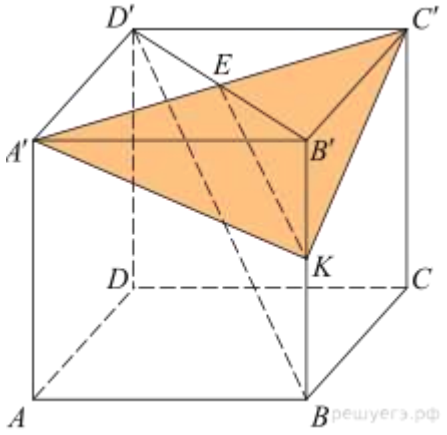
14. Задание 14 № 509821

Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA'B'C'D'$ является квадрат $ABCD$ со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K — середина ребра BB'. Через точки K и C' проведена плоскость α, параллельная прямой BD'.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.

Решение.



а) Проведём KE — среднюю линию треугольника $BB'D'$. E — середина $B'D'$, следовательно, точка пересечения диагоналей верхнего основания и сечение содержит диагональ $A'C'$. Треугольник $A'C'K$ является искомым сечением по признаку параллельности прямой и плоскости.

Прямоугольные треугольники $A'B'K$ и $C'B'K$ равны по двум катетам, поэтому $A'K = C'K$, следовательно, треугольник $A'C'K$ — равнобедренный.

б) Далее имеем:

$$B'K=\frac{1}{2}\cdot BB'=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{7}=\sqrt{7},$$

$$A'K=C'K=\sqrt{B'K^2+B'C'^2}=\sqrt{\sqrt{7}^2+(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{7+18}=5,$$

$$A'C'=\sqrt{A'B'^2+B'C'^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{18+18}=6,$$

$$P_{A'KC'}=5+5+6=16.$$

Ответ: б) 16.

15. Задание 15 № 510020

Решите неравенство $\dfrac{\log_9(2-x)-\log_{15}(2-x)}{\log_{15}x-\log_{25}x}\le\log_{25}9.$

Решение.

Левая часть неравенства определена при $x\in(0,\,1)\cup(1,2).$

При $0<x<1$ получаем $\log_{15}x<\log_{25}x,\ \log_9(2-x)>\log_{15}(2-x),$ поэтому левая часть неравенства отрицательна и не превосходит $\log_{25}9.$

При $1<x<2$ получаем $\log_{15}x>\log_{25}x,\ \log_9(2-x)<\log_{15}(2-x),$ поэтому левая часть неравенства отрицательна и не превосходит $\log_{25}9.$

Таким образом, решение исходного неравенства (0; 1) и (1; 2).

Ответ: $(0;\ 1)\cup(1;\ 2).$

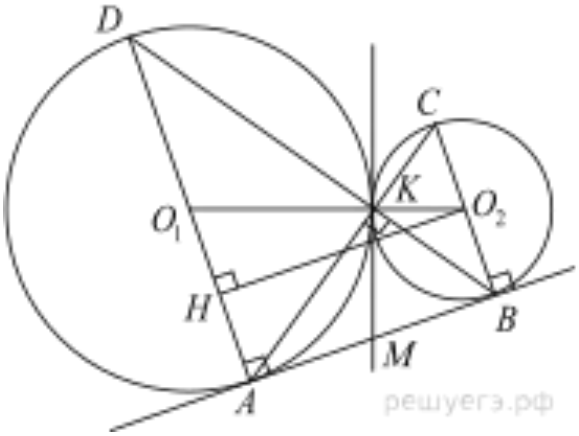
16. Задание 16 № 501887

Две окружности касаются внешним образом в точке *K*. Прямая *AB* касается первой окружности в точке *A*, а второй — в точке *B*. Прямая *BK* пересекает первую окружность в точке *D*, прямая *AK* пересекает вторую окружность в точке *C*.

а) Докажите, что прямые *AD* и *BC* параллельны.

б) Найдите площадь треугольника *AKB*, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Решение.



а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке *K*, пересекает *AB* в точке *M*. По свойству касательных, проведённых из одной точки, *AM* = *KM* и *KM* = *BM*. Треугольник *AKB*, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, — прямоугольный.

Вписанный угол *AKD* прямой, поэтому он опирается на диаметр *AD*. Значит, $AD\perp AB$. Аналогично получаем, что $BC\perp AB$. Следовательно, прямые *AD* и *BC* параллельны.

б) Пусть, для определенности, первая окружность имеет радиус 4, а радиус второй равен 1.

Треугольники *BKC* и *AKD* подобны, $\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{DK}{KB}=4.$ Пусть $S_{BKC}=S$, тогда $S_{AKD}=16S.$

У треугольников *AKD* и *AKB* общая высота, следовательно, $\dfrac{S_{AKD}}{S_{AKB}}=\dfrac{DK}{KB}=\dfrac{AD}{BC},$ то есть S_{AKB} = 4*S*. Аналогично, S_{CKD} = 4*S*. Площадь трапеции *ABCD* равна 25*S*.

Вычислим площадь трапеции *ABCD*. Заметим, что $O_1H=O_1A-AH=O_1A-O_2B.$ Проведём к *AD* перпендикуляр O_2H, равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника O_2HO_1:

$$O_2H=\sqrt{O_1O_2^2-O_1H^2}=4.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = 20.$$

Следовательно, $25S = 20$, откуда $S = 0{,}8$ и $S_{AKB} = 4S = 3{,}2$.

Приведем вариант решения п. б) предложенный Рамилем Багавиевым.

Из первого решения известно, что $O_2H = AB = 4$. Из подобия треугольников AKD и AKB следует $\frac{AK}{BK} = \frac{AD}{BA} = 2,$ таким образом $AK = 2BK$. Напишем теорему Пифагора для треугольника AKB

$$AK^2 + BK^2 = AB^2 = 16 \Leftrightarrow 4BK^2 + BK^2 = 16 \Leftrightarrow BK = \frac{4}{\sqrt{5}}, AK = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

Теперь несложно вычислить $$S_{AKB} = \frac{1}{2} AK \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = 3{,}2.$$

Ответ: 3,2.

17. Задание 17 № 510103

15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение.

Пусть начальная сумма кредита равна S_0, тогда переплата за первый месяц равна $\frac{r}{100} S_0$. По условию, ежемесячный долг перед банком должен уменьшиться равномерно. Этот долг состоит из двух частей: постоянной ежемесячной выплаты, равной $S_0/19$, и ежемесячной равномерно уменьшающейся выплаты процентов, равной

$$\frac{r}{100} S_0, \ \frac{18}{19} \cdot \frac{r}{100} S_0, \ \ldots, \ \frac{2}{19} \cdot \frac{r}{100} S_0, \ \frac{1}{19} \cdot \frac{r}{100} S_0.$$

Используя формулу суммы членов арифметической прогрессии, найдём полную переплату по кредиту:

$$\frac{r}{100} S_0 \left(1 + \frac{18}{19} + \ldots + \frac{2}{19} + \frac{1}{19}\right) = \frac{r}{100} S_0 \cdot \frac{1 + \frac{1}{19}}{2} \cdot 19 = \frac{r}{10} S_0.$$

По условию общая сумма выплат на 30% больше суммы, взятой в кредит, тогда:

$$0{,}1rS_0 = 0{,}3S_0 \Leftrightarrow r = 3.$$

Ответ: 3.

Примечание Дмитрия Гущина.

Укажем общие формулы для решения задач этого типа. Пусть на n платежных периодов (дней, месяцев, лет) в кредит взята сумма S, причём каждый платежный период долг сначала возрастёт на r% по сравнению с концом предыдущего платежного периода, а затем вносится оплата так, что долг становится на одну и ту же сумму меньше долга на конец предыдущего платежного периода. Тогда величина переплаты П и полная величина выплат В за всё время выплаты кредита даются формулами

$$\text{П} = \frac{r}{100} \cdot \frac{n+1}{2} S_0, \qquad \text{В} = S_0 + \text{П} = S_0 \left(1 + \frac{r(n+1)}{200}\right).$$

В условиях нашей задачи получаем: $$\frac{r(n+1)}{200} S_0 = 0{,}3S_0,$$ откуда для $n = 19$ находим $r = 3$.

Доказательство формул (для получения полного балла его нужно приводить на экзамене) немедленно следует из вышеприведённого решения задачи путём замены 19 месяцев на *n* месяцев и использовании формулы суммы *n* первых членов арифметической прогрессии.

18. Задание 18 № 505502

Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение

$$\left(x+\frac{1}{x-a}\right)^2-(a+9)\left(x+\frac{1}{x-a}\right)+2a(9-a)=0.$$

имеет ровно 4 решения.

Решение.

Заметим, что сумма корней уравнения $t^2-(a+9)t+2a(9-a)=0$ равна $a+9$, а их произведение равно $2a(9-a)$. Поэтому корни — числа $2a$ и $9-a$. Тогда для исходного уравнения имеем:

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x-a}=2a, \\ x+\dfrac{1}{x-a}=9-a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-a+\dfrac{1}{x-a}=a, \\ x-a+\dfrac{1}{x-a}=9-2a. \end{array}\right.$$

Каждое из уравнений совокупности может иметь не более двух корней.

Для того, чтобы исходное уравнение имело четыре корня, каждое из уравнений совокупности должно иметь по два корня и при этом уравнения не должны совпадать. Заметим, что если два взаимно обратных числа y и $\dfrac{1}{y}$ различны, то $\left|y+\dfrac{1}{y}\right|>2.$ Используя это свойство, получаем, что четыре корня исходное уравнение будет иметь при

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a<-2, \\ a>2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 9-2a<-2, \\ 9-2a>2, \end{array}\right. \\ a\neq 9-2a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a<-2, \\ a>2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a>\dfrac{11}{2}, \\ a<\dfrac{7}{2}, \end{array}\right. \\ a\neq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-2, \\ 2<a<3, \\ 3<a<\dfrac{7}{2}, \\ a>\dfrac{11}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ 3)\cup\left(3;\ \frac{7}{2}\right)\cup\left(\frac{11}{2};\ +\infty\right).$

19. Задание 19 № 525123

Вася и Петя решали задачи из сборника, и они оба решили все задачи этого сборника. Каждый день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя решал на две задачи больше, чем в предыдущий день. Они начали решать задачи в один день, при этом в первый день каждый из них решил хотя бы одну задачу.

а) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу меньше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за 5 дней?

б) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу больше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за 4 дня?

в) Какое наименьшее количество задач могло быть в сборнике если каждый из ребят решал задачи более 6 дней, причем в первый день один из мальчиков решил на одну задачу больше чем другой?

Решение.

а) Пусть Петя в первый день решил x задач. Тогда в оставшиеся дни он решил $x+2, x+4, x+6, x+8$ задач. Всего в сборнике оказывается $5x+20$ задач. Вася в первый день решил $x-1$ задачу. В следующие дни он решал $x, x+1, x+2, x+3, x+4, \ldots$ задач. За пять дней решить все задачи Вася не мог. Если Вася решил все задачи сборника за шесть дней, то он решил $6x+9$ задач. Уравнение $5x+20=6x+9$ имеет решение $x=11$. Тем самым приведен пример, удовлетворяющий условию: Вася решил в первый день 10 задач, Петя — 11 задач.

б) Вновь обозначим за x число задач, решенных Петей в первый день. Тогда всего Петя решил $4x+12$ задач. Вася решал $x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, \ldots$ задач. Если Вася решил все задачи сборника за четыре дня или менее, то он решил не более $4x+10$ задач. Но тогда Вася решил меньше задач, чем Петя. Противоречие. Если Вася решал задачи пять дней или более, то он решил как минимум $5x+15$ задач. Тогда Вася решил больше задач, чем Петя. Противоречие.

в) Петя решал задачи не менее семи дней. Начнем со случая, когда он решал задачи ровно семь дней. Тогда в сборнике оказывается $7x+42$ задачи. Если Вася решил в первый день на одну задачу больше, чем Петя, то за семь дней он решил $7x+28$ задач. Следовательно, Вася решал задачи более семи дней. За восемь дней он бы решил $8x+36$ задач. Уравнение $7x+42=8x+36$ имеет решение $x=6$. За девять дней или более Вася бы решил как минимум $9x+45$ задач, что превосходит число задач в сборнике. Если Вася в первый день решил на одну задачу меньше, чем Петя, то вновь ему, очевидно, придется решать задачи более семи дней. За восемь дней он бы решил $8x+20$ задач, за девять дней $9x+27$ задач, за десять дней $10x+35$ задач, за большее число дней как минимум $11x+44$ задачи (что заведомо больше числа задач в сборнике). Уравнения $7x+42=8x+20$, $7x+42=9x+27$, $7x+42=10x+35$ не имеют целых решений, меньших 6.

Тем самым, в случае, когда Петя решал задачи ровно семь дней, в сборнике не могло оказаться меньше $7x+42=7\cdot 6+42=84$ задач (напомним, что такое могло быть, если Петя решил в первый день 6 задач, а Вася 7; Петя решал задачи 7 дней, а Вася 8).

Перейдем к случаям, когда Петя решал задачи более семи дней. Перечислим всевозможные значения, которые может принимать сумма $1+2+\ldots+n$: это 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, ... (так называемые «треугольные числа»).

Если Петя решил весь сборник за 8 дней, то он решил $8x+56$ задач. Нас интересует, может ли это число быть меньше 84. Необходимо проверить $x=1, x=2, x=3$.

При $x=1$ задач в сборнике $8\cdot 1+56=64$. Вася в первый день решил 2 задачи, то есть всего Вася решил $2+3+4+5+\ldots$ задач. Следовательно, 64 должно быть меньше треугольного числа на 1. Противоречие.

При $x=2$ задач в сборнике $8\cdot 2+56=72$. Вася в первый день решил или 1 задачу, или 3 задачи. Следовательно, 72 должно или совпадать с треугольным числом, либо быть меньше него на 1 + 2 = 3. Противоречие.

При $x=3$ задач в сборнике $8\cdot 3+56=80$. Вася в первый день решил или 2, или 4 задачи. Следовательно, 80 должно быть меньше треугольного числа или на 1, или на 1 + 2 + 3 = 6. Противоречие.

Если же Петя решил весь сборник за 9 дней, то он решил $9x+72$ задач. Единственная подходящая возможность, чтобы задач в сборнике было меньше 84, это $x=1$. Но тогда в сборнике 81 задача. В первый день Вася решил 2 задачи. Следовательно, 81 должно быть на 1 меньше треугольного числа. Противоречие.

Если Петя решал сборник более 9 дней, то он решил как минимум $10x+90$ задач, что заведомо больше 84.

Ответ: а) да; б) нет; в) 84.

$$\left(\frac{10}{5x-21}+\frac{5x-21}{10}\right)^2 \le \frac{25}{4}.$$